

TARTU ÜLIKOO
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

LAURA KRUUSMANN

Mahuriski hinnastamine elektriturul

MAGISTRITÖÖ (30 EAP)

FINANTS- JA KINDLUSTUSMATEMAATIKA ERIALA

Juhendajad: Raul Kangro,
Taavi Pungas (Eesti Energia)

TARTU 2018

Mahuriski hinnastamine elektriturul

Magistritöö

Laura Kruusmann

Lühikokkuvõte. Magistritöö eesmärk on leida meetod mahuriskist tuleneva hinnalisa leidmiseks elektriturul. Töös on analüüsitud mahuriski olemust ning selle hinnastamiseks on tuletatud valem minimaalse fikseeritava hinna leidmiseks teatud kliendi korral. Saadud valemi rakendamist on demonstreeritud erinevatel eeldustel elektrituru kohta.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonanalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatematika.

Märksõnad: Juhuslikud protsessid, Aegridade analüüs, Riskianalüüs, Elektriturg.

Volume risk pricing in electricity market

Master's thesis

Laura Kruusmann

Abstract. The purpose of this master's thesis is to find a method for calculating the mark-up arising from volume risk in electricity market. The thesis includes analysing the volume risk and deriving a formula of the minimal fixed price for a customer. The implementation of the obtained formula is then demonstrated for different assumptions about electricity market.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics.

Key words: Random processes, Analysis of time series, Risk analysis, Electricity market.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Mahuriski kujunemine ja mõju fikseeritavale hinnale	5
1.1 Elektri turuhinna ja tarbimise vaheline korreleeritus	5
1.2 Mahuriski definitsioon	5
1.3 Mahuriskist põhjustatud hinnalisa	6
1.4 Optimaalne futuuride kogus q_f	7
2 Mahuriski modelleerimine	9
2.1 Sõltumatud sama jaotusega vaatlused	10
2.2 Sõltumatud sama jaotusega juhuslikud häiritused	13
2.3 Lepinguperiood tulevikus	25
2.4 Tarbimise ja turuhindade mõjutegurid	30
2.5 Ühesuunaline sõltuvus	41

Sissejuhatus

Elektrimüüjad pakuvad klientidele lisaks muutuva hinnaga lepingutele ka fikseeritud hinnaga lepinguid, mis kohustavad elektrimüüjat müüma klientidele kokkulepitud hinnaga elektrit kogu tarbimise ulatuses. Selliseid lepinguid on võimalik teha perioodideks, mille pikkus ja algushetk on kliendi poolt vabalt valitav, kusjuures üldiselt on periood vähemalt kolme kuu pikkune.

Fikseeritud hinnaga lepingud tekitavad elektrimüüjale hinnariski, mis tuleneb turuhinna kui juhusliku suuruse erinevusest fikseeritud hinnast. Hinnariski vähendamiseks kaubeldakse elektriturul futuuridega. Selleks prognoosib elektrimüüja kliendi tarbimise lepinguperioodiks ning sellest lähtuvalt ostab elektriturult teatud koguse futuure. Futuur kohustab elektrimüüjat ostma lepingus märgitud ajal kokkulepitud koguse ja kokkulepitud hinnaga elektrit. Niisiis ei ole elektri ostuhind elektrimüüjale kliendiga lepingu sõlmimise hetkel enam teadmata suurus ning elektrimüüja riskiks jääb vaid prognoositud tarbimisest erinev tarbimine, mida nimetame mahuriskiks.

Futuurihind on aluseks kliendile pakutava fikseeritud hinna määramisel. Fikseeritud hind peab olema futuurihinnast mõnevõrra suurem, et katta mahuriskist tulenev võimalik lisakulu.

Magistritöö eesmärk on leida meetod mahuriskist tuleneva hinnalisa leidmiseks lähtuvalt mitmesugustest elektrituru käitumist kirjeldavatest mudelitest ja eeldusest, et küsitav hind peab katma vähemalt lepinguga seotud oodatavad kulud. Idee on leida kliendiga fikseeritav hind elektrimüüja oodatava kasumi võrrandist, mis sisaldab endas elektri tarbimise ja turuhindade vahelise kovaratsiooni hindamist.

Töö koosneb kahest osast.

Esimeses osas defineerime esmalt mahuriski ning seejärel uurime elektrimüüja kasumile vastava juhusliku suuruse käitumist fikseeritud hinnaga lepingu sõlmimisel, millest tuletame valemi minimaalse fikseeritava hinna leidmiseks. Peatüki lõpetuseks tuletame valemi ka teatud fikseeritud hinna korral sellise futuuride koguse leidmiseks, mis minimeeriks elektrimüüja kasumi varieeruvust.

Teises osas vaatame fikseeritud hinna leidmist erinevatel eeldustel elektri tarbimise ja turuhindade kohta.

Peatükki alustame range eeldusega, et nii tarbimismahud kui ka turuhinnad on sõltumatud sama jaotusega ning seejärel nõrgendame tingimust eeldades seda vaid vaadeldavatele protsessidele vastavate juhuslike häirituste kohta. Samadel eeldustel vaatame ka tulevikus algava lepinguperioodi korral fikseeritava hinna leidmist.

Edasises toome sisse nii tarbimist kui ka turuhindu mõjutavad tegurid ning kasutame neid mudelite täpsustamiseks fikseeritud hinna leidmisel. Viimaseks uurime kuidas tarbimine mõjutab elektri turuhindu.

Magistritöös on kasutatud ajavahemiku 01.01.2015 – 31.01.2018 kogu Eesti kuu keskmisi elektri tarbimismahte megavatt tundides (kui pole öeldud teisiti), mis on saadud summeerides kogu Eesti tunnipõhised tarbimismahud[EN] ühes kuus ning seejärel jagades vastava kuu tundide arvuga. Lisaks on kasutatud ka ajavahemiku 01.01.2015 – 31.01.2018 Nord Pooli kuupõhiseid elektri turuhindu[NO] Eestis (kui pole öeldud teisiti). Tarbimismahtude andmed on võetud Entsoe veebiplatvormilt, milles puuduvad väärtused on asendatud eelneva ja järgneva teadaoleva väärtuse aritmeetilise keskmisega. Kellakeeramise tõttu vahelejäädud tunnid on eemaldatud tarbimismahtude andmestikust enne nende programmi sisselugemist. Futuuride hinnad on võetud Nasdaq veebilehelt[NA].

1 Mahuriski kujunemine ja mõju fikseeritavale hinnale

Tähistame kliendilepinguga fikseeritava hinna r , lepingu perioodi T , futuuri hinna F ning elektrimüüja poolt ostetavate futuuride koguse q_f .

Selles peatükis defineerime mahuriski ning kirjeldame selle olemust. Seejärel tuletame valemi sellise minimaalse fikseeritava hinna r_{min} leidmiseks, mis katab ära mahuriskist tuleneva kulu. Peatüki lõpetuseks tuletame valemi sellise futuuride koguse q_f leidmiseks, mille korral oleks elektrimüüja kasumi varieeruvus minimaalne.

Vaatleme tarbimismahtu ning elektri turuhinda juhuslike protsessidena vastavalt $\{Q_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ ja $\{S_t \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Olgu $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ mõõtv ruum. Olgu $\{\mathcal{F}_t \mid t \in \mathbb{N}_0\}$ protsesside $\{Q_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ ja $\{S_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ naturaalne filtratsioon, s.t

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}, \text{ kus } \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

ning

$$\forall t \in \mathbb{N} \mathcal{F}_t = \sigma(Q_1, \dots, Q_t, S_1, \dots, S_t).$$

Märkus 1. Järgnevas on mõnel juhul vaadeldud filtratsiooni \mathcal{F} ka muude parasjagu uuritavate protsesside naturaalse filtratsioonina.

Olgu $E(Q_T \mid \mathcal{F}_{T-1})$ perioodi T oodatav tarbimismaht ning $E(S_T \mid \mathcal{F}_{T-1})$ perioodi T oodatav turuhind.

1.1 Elektri turuhinna ja tarbimise vaheline korreleeritus

Elektri turuhinna ja tarbimise vahel võib näha kahte seost. Ühelt poolt kujuneb elektri turuhind vastavalt tarbimisele. On selge, et turult ostetakse esimesena ära kõige odavam elekter ning seejärel liigutakse edasi kallimate juurde. Seega alustavad elektri tootmist ennekõike odavaima tootmisviisiga elektritootjad ning alles nõudluse suurenemisel hakkavad tootma ka kallima tootmisviisiga elektritootjad. Siit järeldub, et nõudluse kasvades tõuseb elektri turuhind. Nõudluse kahanedes lõpetavad kallima tootmisviisiga elektritootjad tootmise ning turul pakutakse jälle odavamat elektrit. See tähendab, et nõudluse kahanedes elektri turuhind langeb.

Teiselt poolt võib mõjutada muutuva hinnaga lepinguga kliendi tarbimisotsuseid elektri turuhind. Kui turuhind tõuseb, siis võib klient vähendada enda elektri tarbimist ning turuhinna langedes tarbimist suurendada.

Seega määrab elektri turuhinna ja tarbimise vahelise korrelatsiooni suuna ja suuruse toodud seoste omavaheline suhe. Märkusena olgu öeldud, et reaalsuses esineb tarbimisotsuste mõjutamist turuhindade poolt minimaalselt ning pigem mitte suurl klientide seas.

1.2 Mahuriski definitsioon

Definitsioon 1. Mahuriskiks nimetatakse riski, et oodatav maht erineb tegelikust mahust.

Elektri tarbimine on juhuslik, mistõttu tuleneb mahurisk elektriturul sellest, et kliendi tegelik tarbimine lepinguperioodis erineb tema prognoositud tarbimisest.

Vaatame lähemalt, mis juhtub, kui kliendi tegelik elektri tarbimine ja prognoositud tarbimine ei ühti.

Kui klient tarbib lepinguperioodis T prognoositust rohkem, s.t $q_T > E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})$, siis tuleb elektrimüüjal puudu olev elekter osta elektriturult sellel hetkel kehtiva turuhinnaga. Turuhinna ja tarbimise vahelise positiivse korreleerituse tõttu kaasneb suurema nõudlusega kõrgem elektri turuhind, mistõttu peab elektrimüüja elektri puudujäägi eest enamasti maksma rohkem, kui kliendiga kokku lepiti.

Kui klient tarbib lepinguperioodis T prognoositust vähem, s.t $q_T < E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})$, siis tekib elektrimüüjal eelnevalt ostetud futuuridest ülejääk, mida on võimalik elektriturul maha müüa sellel hetkel kehtiva turuhinnaga. Turuhinna ja tarbimise vahelise positiivse korreleerituse tõttu kaasneb väiksema nõudlusega enamasti madalam elektri turuhind, mistõttu saab elektrimüüja elektri ülejäägi eest tagasi vähem, kui selle koguse ostmiseks kulutati.

Käesolevas töös eeldame, et elektriturg on (nõrgalt) efektiivne. Siis kehtib võrdus

$$F = E(S_T | \mathcal{F}_{T-1}). \quad (1)$$

1.3 Mahuriskist põhjustatud hinnalisa

Olgu meil klient, kes soovib sõlmida elektrimüüjaga fikseeritud hinnaga lepingut perioodiks T . Elektrimüüja prognoosib kliendi tarbimise selleks perioodiks kasutades näiteks kliendi tarbimisajalugu. Järgmiseks ostab elektrimüüja futuure mahus q_f futuurihinnaga F .

Fikseeritud hinnaga lepingu tõttu on elektrimüüja kohustatud müüma kliendile elektrit hinnaga r kogu tema tarbimise ulatuses perioodis T . See tähendab, et elektrimüüja saab kliendilt summa $r \cdot q_T$, kuid elektrimüüja peab elektri ostmiseks kulutama summa $q_f \cdot F + (q_T - q_f) \cdot s_T$. Seega on elektrimüüja kasum esitatav kujul

$$r \cdot q_T - q_f \cdot F - (q_T - q_f) \cdot s_T. \quad (2)$$

Nii kliendi kui elektrimüüja suhtes õiglase fikseeritava hinna leidmiseks peaks elektrimüüja oodatav kasum olema suurem või võrdne 0ga. Seega saame võrrandi

$$E[r \cdot Q_T - q_f \cdot F - (Q_T - q_f) \cdot S_T | \mathcal{F}_{T-1}] \geq 0.$$

Avaldame siit valemi fikseeritava hinna r leidmiseks. Turu efektiivsuse tõttu kehtib võrdus (1), mistõttu

$$\begin{aligned}
r \cdot E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) - q_f \cdot E(S_T | \mathcal{F}_{T-1}) - E(Q_T \cdot S_T | \mathcal{F}_{T-1}) + q_f \cdot E(S_T | \mathcal{F}_{T-1}) &\geq 0 \\
r \cdot E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) - E(Q_T \cdot S_T | \mathcal{F}_{T-1}) &\geq 0 \\
r &\geq \frac{E(Q_T \cdot S_T | \mathcal{F}_{T-1})}{E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})}
\end{aligned}$$

Teame, et juhuslike suuruste X ja Y korral kehtib

$$\text{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY.$$

Seega teisendub fikseeritava hinna r valem kujule

$$r \geq \frac{\text{cov}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) + E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) \cdot E(S_T | \mathcal{F}_{T-1})}{E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})}.$$

Kasutades jällegi võrdust (1), saame otsitavaks valemiks

$$r \geq \frac{\text{cov}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) + E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) \cdot F}{E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})}.$$

See tähendab, et elektrimüüja peaks mahuriskist tuleneva lisakulu katmiseks fikseerima kliendiga vähemalt hinna

$$r_{\min} = \frac{\text{cov}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) + E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) \cdot F}{E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})}. \quad (3)$$

Fikseeritavat hinda on vaja kliendilepingu sõlmimiseks, kuid saadud arv mahuriski iseseisvalt ei kirjelda. Mahuriskist põhjustatud hinnalisa suurus on leitav minimaalse fikseeritud hinna ja futuurihinna vahena

$$r_{\min} - F = \frac{\text{cov}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1})}{E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})} = \text{corr}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) \cdot \frac{\sigma^{Q_T}}{E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})} \cdot \sigma^{S_T},$$

kus $\sigma^{Q_T} = \sqrt{D(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})}$ ja $\sigma^{S_T} = \sqrt{D(S_T | \mathcal{F}_{T-1})}$.

Huvi võib pakkuda ka mahuriskist põhjustatud protsentuaalne hinnalisa

$$\frac{r_{\min} - F}{F} = \frac{\text{cov}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1})}{F \cdot E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})} = \text{corr}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) \cdot \frac{\sigma^{Q_T}}{E(Q_T | \mathcal{F}_{T-1})} \cdot \frac{\sigma^{S_T}}{E(S_T | \mathcal{F}_{T-1})},$$

kus viimase võrduse tuletamisel on kasutatud võrdust (1).

1.4 Optimaalne futuuride kogus q_f

Alapeatükis 1.3 nägime, et turu efektiivsuse eeldusel koondus elektrimüüja oodatava kasumi valemist futuuride kogus q_f välja. Selle tulemusena saime, et kliendiga fikseeritav hind r ei sõltu elektrimüüja poolt ostetavast futuuride kogusest.

On selge, et kui elektrimüüja otsustab osta kogu vajamineva elektri turult, siis on elektrimüüja teadmata kulu suurem kui seda oleks mingi koguse elektrit ette ostes, s.t

$$q_T \cdot s_T > (q_T - q_f) \cdot s_T, \quad q_f > 0.$$

Siis on aga elektrimüüja kulu ja seega ka eelnevalt vaadeldud kasumi varieeruvus suur. Meie eesmärgiks on optimaalse futuuride koguse valikuga elektrimüüja kasumi varieeruvust minimiseerida. Alapeatükis 1.3 tuletatud elektrimüüja kasumi (2) dispersioon fikseeritud r korral on

$$\begin{aligned} & D(r \cdot Q_T - q_f \cdot F - (Q_T - q_f) \cdot S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= D(r \cdot Q_T - Q_T S_T + q_f \cdot S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= D(-Q_T S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + D(r \cdot Q_T + q_f \cdot S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + 2 \cdot \text{cov}(-Q_T S_T, r \cdot Q_T + q_f \cdot S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= D(Q_T S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + r^2 \cdot D(Q_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + q_f^2 \cdot D(S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + 2r q_f \cdot \text{cov}(Q_T, S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) \\ &\quad - 2r \cdot \text{cov}(Q_T S_T, Q_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) - 2q_f \cdot \text{cov}(Q_T S_T, S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}). \end{aligned}$$

Saadud dispersiooni miinimumkohaks on

$$q_f = \frac{\text{cov}(Q_T S_T, S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) - r \cdot \text{cov}(Q_T, S_T \mid \mathcal{F}_{T-1})}{D(S_T \mid \mathcal{F}_{T-1})}. \quad (4)$$

Seega oleme saanud valemi sellise optimaalse futuuride koguse leidmiseks, mis kliendiga fikseeritud hinna korral minimiseeriks elektrimüüja oodatava kasumi varieeruvust. Saadud valemit on rakendatud käesolevas töös peatükis 2.2 näites 2.

2 Mahuriski modelleerimine

Siin peatükis vaatame minimaalse fikseeritava hinna r_{min} leidmist erinevatel eeldustel tarbimismahtude protsessi $\{Q_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ ja turuhindade protsessi $\{S_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ kohta. Edasises töös kasutame elektri tarbimismahtude ja turuhindade juhuslikke häiritusi, seega esmalt defineerime need.

Tähistame protsessi $\{Q_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ juhuslikud häiritused

$$A_t = Q_t - E(Q_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad t \in \mathbb{N},$$

ning protsessi $\{S_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ juhuslikud häiritused

$$B_t = S_t - E(S_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad t \in \mathbb{N},$$

kus iga $t \in \mathbb{N}$ korral $E(Q_t | \mathcal{F}_{t-1})$ on tarbimismahtude tinglik keskväärus vahetult enne hetke t teada oleva tarbimisajaloo põhjal ja $E(S_t | \mathcal{F}_{t-1})$ on elektri turuhindade tinglik keskväärus vahetult enne hetke t teada oleva turuhindade ajaloo põhjal. Niiviisi defineerides on juhuslikud häiritused tsentreeritud.

2.1 Sõltumatud sama jaotusega vaatlused

Olgu juhuslike suuruste paarid (Q_t, S_t) , $t \in \mathbb{N}$, sõltumatud ja sama jaotusega. See tähendab, et

$$\forall i \neq j, i, j \in \mathbb{N}, Q_i \perp Q_j, Q_i \perp S_j, S_i \perp S_j$$

ning

$$Q_t \sim Q \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

$$S_t \sim S \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Seega eeldame sõltuvust vaid sama perioodi tarbimismahu ja turuhinna vahel. Sellistel eeldustel on meile huvipakkuv kovaratsioon leitav valemiga

$$\text{cov}(\widehat{Q_T}, \widehat{S_T} | \mathcal{F}_{T-1}) = \text{cov}(\widehat{Q}, \widehat{S} | \mathcal{F}_{T-1}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (q_i - E(\widehat{Q} | \mathcal{F}_{T-1}))(s_i - E(\widehat{S} | \mathcal{F}_{T-1})), \quad (5)$$

kus n on valimimaht, $E(\widehat{Q} | \mathcal{F}_{T-1})$ on tarbimismahtude keskväärtuse hinnang ning $E(\widehat{S} | \mathcal{F}_{T-1})$ on turuhindade keskväärtuse hinnang.

Näide 1

Oletame, et elektri tarbimismahud ja turuhinnad rahuldavad eelnevalt toodud eeldusi.

Leiame fikseeritava hinna 2018. aasta veebruarikuuks. Siin näites kasutame selleks kogu Eesti kuukeskmisi elektri tarbimismahte ajavahemikus 01.01.2015 – 31.01.2018 ning Nord Pooli kuukeskmisi elektri turuhindu ajavahemikus 01.01.2015 – 31.01.2018. Seega on kasutatava valimi maht $n = 37$ ning lepinguperiood $T = 38$ märgib siin 2018. aasta veebruari kuud. Arvutustes on kasutatud ka 2018. aasta veebruarikuu futuuri müügihinda 31.01.2018 seisuga, milleks on $F = 36.3$ €.

Elektri tarbimismahtude ja turuhindade keskväärtuseid hindame vastavate valimite aritmeetilise keskmisega

$$E(\widehat{Q} | \mathcal{F}_{T-1}) = \frac{1}{37} \sum_{t=1}^{37} q_t \approx 934 \text{ MWh},$$

$$E(\widehat{S} | \mathcal{F}_{T-1}) = \frac{1}{37} \sum_{t=1}^{37} s_t \approx 32.58 \text{ €}.$$

Tarbimise ja turuhindade vaheline kovaratsioon on seega

$$\text{cov}(\widehat{Q_T}, \widehat{S_T} | \mathcal{F}_{T-1}) \approx 141.8 \text{ (MWh} \cdot \text{€)}.$$

Valemi (3) rakendamiseks tuleb leida veel 2018. aasta veebruarikuuks elektri oodatava tarbimise hinnang $E(\widehat{Q_T | \mathcal{F}_{T-1}})$. Kuna eelduste kohaselt on tarbimismahud sõltumatud, siis hindame ka oodatavat tarbimismahu valimi aritmeetilise keskmisega. Seega

$$E(\widehat{Q_T | \mathcal{F}_{T-1}}) = \widehat{EQ} \approx 934 \text{ MWh.}$$

Minimaalseks fikseeritavaks hinnaks r_{min} on siis

$$r_{min} \approx 36.45 \text{ €}.$$

Futuurihinnaga $F = 36.3 \text{ €}$ võrreldes on sellisel juhul mahuriskist tulenev hinnalisa ligikaudu 0.15 € .

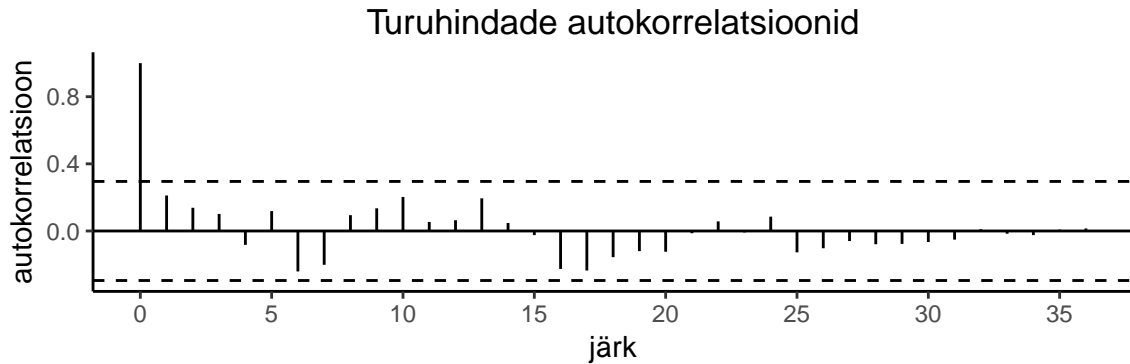
Eelpool tehtud eeldused reaalsuses aga ei kehti. On selge, et keskmine tarbimine ja tarbimismahude varieeruvus sõltub aastaajast ning et tarbimismahud on minevikuväärtustest sõltuvad. Sõltuvuste uurimiseks vaatame kummagi aegrea autokorrelatsioone.

Märkus 2. Sõltumatuse korral on teoreetilised autokorrelatsioonid kõikide nullist erinevate järkude korral nullid, see tähendab, et juhuslike suuruste Z_t , $t \in \mathbb{Z}$, korral kehtib

$$Z_i \perp Z_j \quad \forall i \neq j \quad \implies \quad \text{cor}(Z_t, Z_{t-p}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}, p > 0.$$

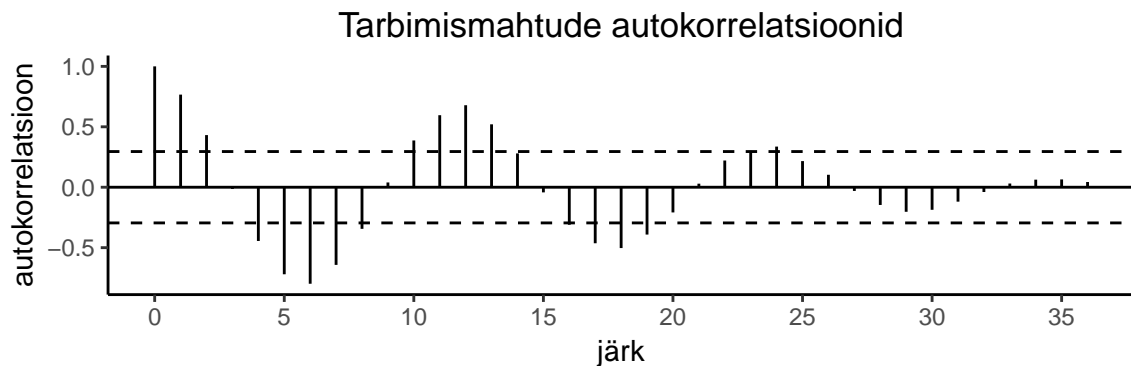
Konkreetses valimi korral on autokorrelatsioonid asümptootiliselt normaaljaotusega keskvärtusega $-\frac{1}{n}$ ja standardhõlbega $\frac{1}{\sqrt{n}}$ [CC, lk 249-274], kus n on valimimaht. Seega sõltumatuse korral oleksid valimi autokorrelatsioonid 95%-lise tõenäosusega vahemikus $\left(-\frac{1}{n} - \frac{1.96}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{n} + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right)$.

Järgneval graafikul näeme kuukeskmiste turuhindade autokorrelatsioone koos vastava usaldusvahemikuga.



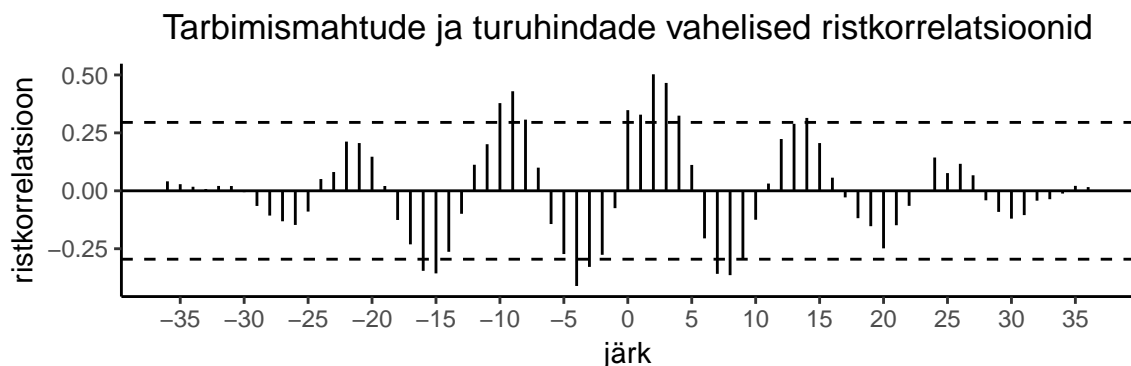
Graafikul on näha, et turuhindade autokorrelatsioonid jäävad lubatud veapiiridesse. Seega turuhindade autokorrelatsioonid meie vastuolu sõltumatusega ei näita.

Järgneval graafikul näeme kuukeskmiste tarbimismahude autokorrelatsioone koos vastava usaldusvahemikuga.



Kuiste tarbimismahtude autokorrelatsioonide graafikul näeme mitmeid usaldusvahemikust välja ulatuvaid autokorrelatsioone nagu näiteks nihkega 1 autokorrelatsioon. Järelikult ei ole sõltumatuse eeldus tarbimise aegrea korral täidetud.

Vaatame ka elektri tarbimise ja turuhindade vahelisi ristkorrelatsioone, mis näitavad võimalikke sõltuvusi tarbimise ja turuhindade erinevatele perioodidele vastavate vaatluste vahel.



Graafikul on näha mitmetele järkudele vastavaid ristkorrelatsioone, mis on lubatud veapiiridest väljas, nagu näiteks nihkega 1 ristkorrelatsioon. Seega ei ole elektri tarbimise ja turuhindade erinevatele perioodidele vastavate vaatluste vahelise sõltumatuse eeldus täidetud.

Kuna selle peatüki alguses tehtud eeldused reaalsuses ei kehti, siis siin toodud lihtne lähenemine mahuriski hinnastamiseks ei ole sobilik.

2.2 Sõltumatud sama jaotusega juhuslikud häiritused

Järgnevas vaatame peatükis 2 defineeritud juhuslike häirituste protsesse $\{A_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ ja $\{B_t \mid t \in \mathbb{N}\}$.

Eeldame, et juhuslike häirituste paarid (A_t, B_t) , $t \in \mathbb{N}$, on sõltumatud, sama jaotusega, s.t

$$\forall i \neq j, i, j \in \mathbb{N}, A_i \perp A_j, A_i \perp B_j, B_i \perp B_j$$

ja

$$A_t \sim A, B_t \sim B \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

ning eeldame ka, et paarid (A_t, B_t) , $t \in \mathbb{N}$, on iga $t \in \mathbb{N}$ korral sõltumatud ka \mathcal{F}_{t-1} -st.

Nüüd teisendub elektri tarbimise ja turuhindade vahelise kovaratsiooni valem kujule

$$\begin{aligned} \text{cov}(Q_T, S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) &= \text{cov}(E(Q_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + A_T, E(S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + B_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \text{cov}(A_T, B_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) = \text{cov}(A_T, B_T), \end{aligned}$$

seejuures

$$\widehat{\text{cov}(A_T, B_T)} = \widehat{\text{cov}(A, B)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \widehat{EA})(b_i - \widehat{EB}), \quad (6)$$

kus n on valimimaht, \widehat{EA} on tarbimise protsessile vastavate juhuslike häirituste keskvärtuse hinnang ning \widehat{EB} on elektri turuhindade protsessile vastavate juhuslike häirituste keskvärtuse hinnang.

Seega tuleb minimaalse fikseeritud hinna leidmiseks leida elektri tarbimismahtude ja turuhindade protsessidele vastavad juhuslikud häiritused ning seejärel nende vaheline kovaratsioon. Juhuslike häirituste leidmiseks sobitame kummalegi reale *ARIMA*-tüüpi mudeli.

Definitsioon 2. Olgu $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarne protsess. Siis $\forall t \in \mathbb{N}$ korral $EZ_t = EZ$. Olgu $p, q \in \mathbb{N}$ ning tähistame $\forall t \in \mathbb{N}$ korral $\tilde{Z}_t = Z_t - EZ$. Protsessi $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ nimetatakse *ARMA*(p, q)-tüüpi protsessiks, kui see esitub kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + \epsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i}, \quad t \in \mathbb{N},$$

kus $\{\epsilon_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ on tsentreeritud mittekorreleeritud juhuslike suurustega vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarne protsess.

Märkus 3. Käesolevas töös vaadeldud protsesside korral on juhuslikud suurused ϵ_t , $t \in \mathbb{N}$, ka samast jaotusest.

Definitsioon 3. Olgu meil protsess $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$. Tähistame nihkeoperaatori \mathcal{B} : $\mathcal{B}Z_t = Z_{t-1}$. Olgu $p, q \in \mathbb{N}$ ning tähistame vaadeldava protsessi $d \in \mathbb{N}$ järku muudud $W_t = (1 - \mathcal{B})^d Z_t$, $t \in \mathbb{N}$. *ARIMA*(p, d, q)-tüüpi protsessiks nimetatakse protsessi $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$, mille d -ndat järku muudud $\{W_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ vastavad *ARMA*(p, q)

protsessile.

Järgnevas kasutame mitmel korral AR -tüüpi protsesse, mistõttu toome siinkohal ka selle definitsiooni eraldi välja.

Definitsioon 4. Olgu $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarne protsess. Siis $\forall t \in \mathbb{N}$ korral $EZ_t = EZ$. Olgu $p \in \mathbb{N}$. Protsessi $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ nimetatakse $AR(p)$ -tüüpi protsessiks, kui see esitub kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{N}$$

ehk defineerides $\phi(x) = \phi_0 + \phi_1 x + \phi_2 x^2 + \dots$

$$\phi(\mathcal{B})\tilde{Z}_t = \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{N},$$

kus $\{\epsilon_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ on tsentreeritud mittekorreleeritud juhuslike suurustega vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarne protsess.

$ARIMA$ -tüüpi mudelite sobitamisel uurime vastava aegrea autokorrelatsioone ja ka osaautokorrelatsioone.

Definitsioon 5. Olgu meil vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarne protsess $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$. Selle protsessi $p \in \mathbb{N}$ järku osaautokorrelatsiooniks nimetatakse juhuslike suuruste \tilde{Z}_t ja \tilde{Z}_{t-p} , $t \in \mathbb{N}$, osakorrelatsiooni pärast juhuslike suuruste $\tilde{Z}_{t-1}, \tilde{Z}_{t-2}, \dots, \tilde{Z}_{t-(p-1)}$ mõju eemaldamist ehk juhuslike suuruste $\tilde{Z}_t - \mathcal{P}\tilde{Z}_t$ ja $\tilde{Z}_{t-p} - \mathcal{P}\tilde{Z}_{t-p}$ vahelist korrelatsiooni, kus \mathcal{P} on vähimruutude projektor suurustega $\tilde{Z}_{t-1}, \tilde{Z}_{t-2}, \dots, \tilde{Z}_{t-(p-1)}$ määratud alamruumile.

Üldiselt näitavad autokorrelatsioonid uuritava protsessi võimalikke sõltuvusi juhuslike häiritustega, samas osaautokorrelatsioonid näitavad võimalikke sõltuvusi selle protsessi minevikuväärtustega.

Järgnevas kasutame mudeli sobivuse hindamiseks lisaks jääkide sõltumatuse ja jaotuse uurimisele ka Ljung-Box testi.

Definitsioon 6. [LB, lk 297-303] Olgu n valimimaht ning r_p valimi järguga $p \in \mathbb{N}$ autokorrelatsioon. Ljung-Box test põhineb hüpoteeside paaril

$$\begin{cases} H_0 & : \text{valimi väärtused vastavad sõltumatutele sama jaotusega juhuslikele suurustele} \\ H_1 & : \text{valimi väärtused ei vasta sõltumatutele sama jaotusega juhuslikele suurustele.} \end{cases}$$

Teststatistik

$$Q = n(n+2) \sum_{p=1}^m \frac{r_p^2}{n-p} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_m^2$$

on hüpoteesi H_0 kehtivuse korral asümptootiliselt hii-ruut jaotusega, kus vabadusastmete arvaks on testitavate järkude arv m . Seega fikseeritud olulisuse nivoo α korral, kui

$$Q > \chi_{1-\alpha, m}^2,$$

kus $\chi^2_{1-\alpha, m}$ on vabadusastmete arvuga m hii-ruut jaotuse $1 - \alpha$ kvantiil, siis tõenäosusega $1 - \alpha$ ei vasta valimi väärtused sõltumatutele sama jaotusega juhuslikele suurustele.

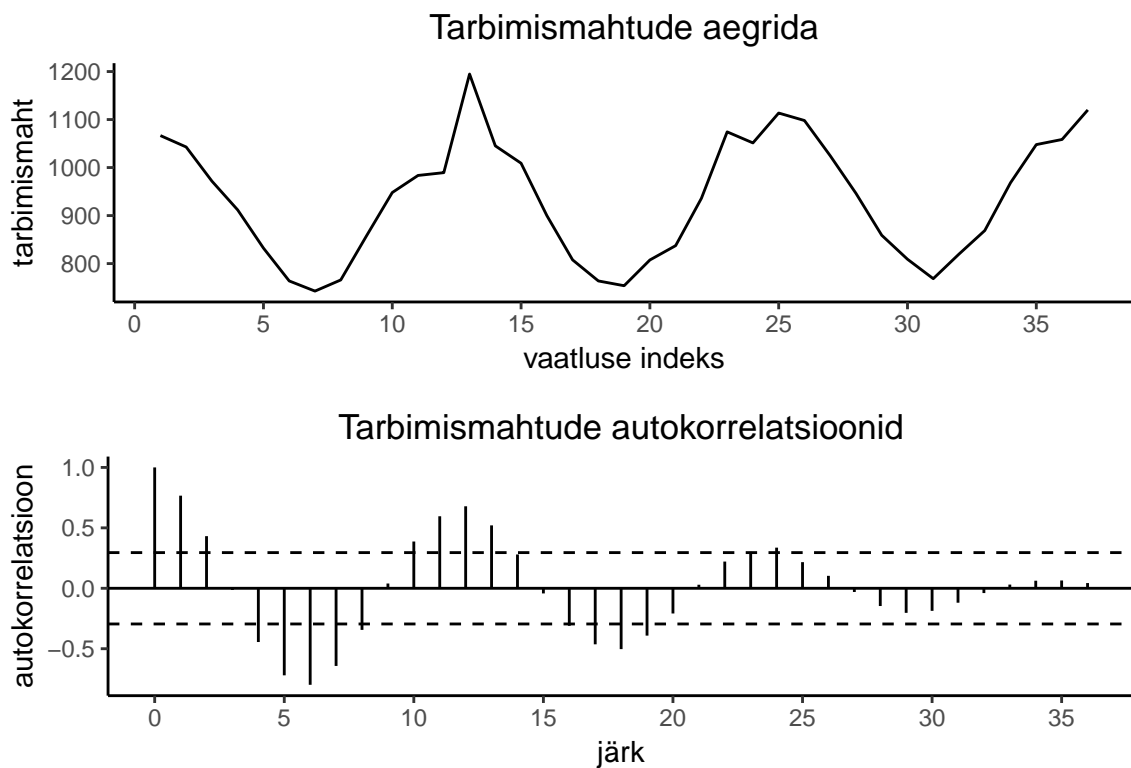
Märkus 4. [LB, lk 297-303] Ljung-Box testiga $ARIMA$ - tüüpi mudeli jääkide testimisel tuleb vabadusastmete arvu kohandada vastavalt mudelis kasutatud parameetrite arvule.

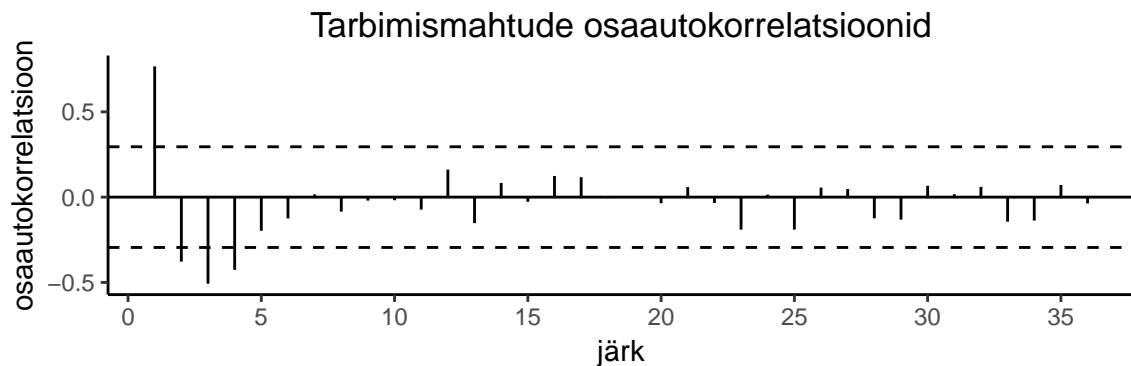
Näide 2

Leiame fikseeritava hinna 2018. aasta veebruarikuuks kasutades näites 1 toodud andmeid.

Sobitame kõigepealt elektri tarbimismahtude andmestikule $ARIMA$ -tüüpi mudeli, mida kasutades saame leida tarbimismahtude protsessile vastavad juhuslikud häiritused A_t , $t \in \mathbb{N}$, ning valemis (3) vajamineva 2018. aasta veebruarikuu tarbimise prognoosi $E(\widehat{Q_T} | \mathcal{F}_{T-1})$.

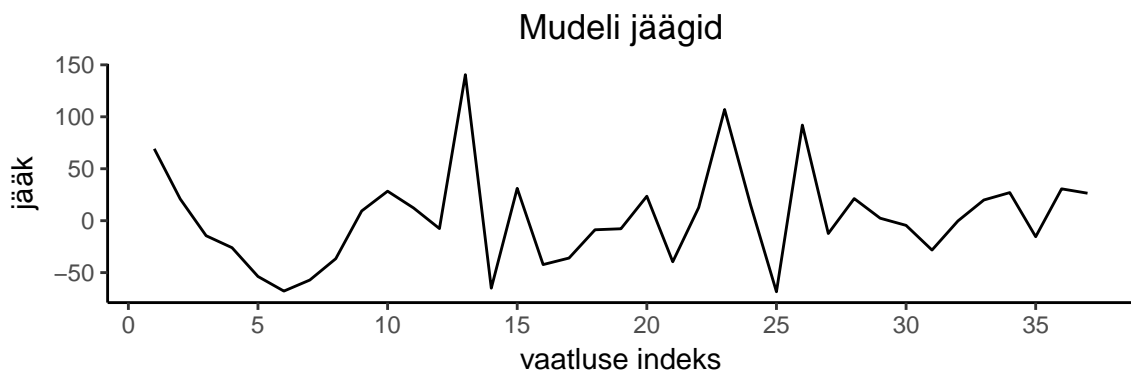
Järgneval graafikul on kogu Eesti kuukeskmised elektri tarbimismahud ajavahemikus 01.01.2015 – 31.01.2018 ning neile vastavad autokorrelatsioonid ja osautokorrelatsioonid. Uurime neid graafikuid, et leida sobiv mudel tarbimismahtude aegreale.



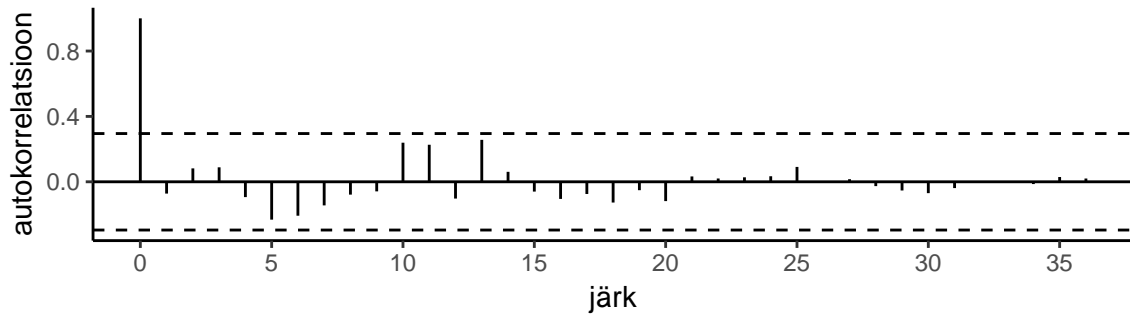


Peatükis 2.1 märkisime, et tarbimine sõltub aastaajast ning seda on ka siin graafikul paista - näeme, et talvel on tarbimine olnud suurem kui suvel. Tugeva sesoonsuse korral on võimalik teha protsess statsionaarseks seda sesoonselt diferentsides. Kuna meil on vaid kolme perioodi andmed, siis sesoonse diferentsiga kaotaksime väga suure osa olemasolevast informatsioonist, mistõttu diferentsitud reale sobitatud mudel ei ole kuigi täpne. Seetõttu ei ole sesoonne diferentsimine antud juhul mõistlik. Sesoonsuse kajastamiseks saame mudelisse lisada sesoonsele sõltuvusele vastavaid liikmeid.

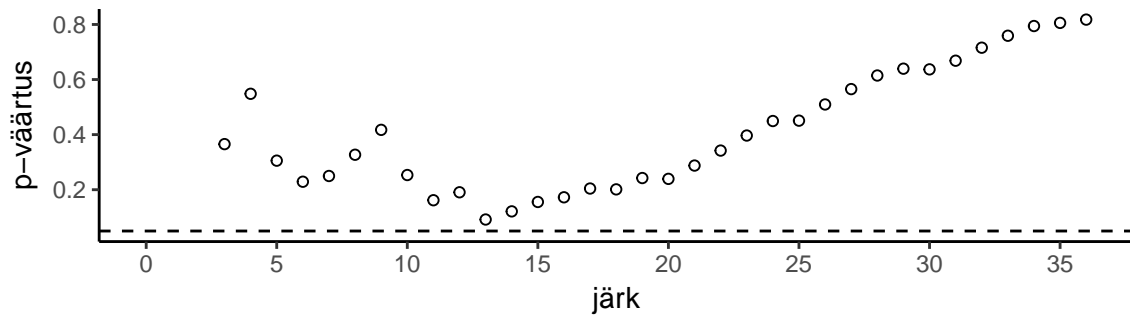
Osaaautokorrelatsioonide graafikul näeme, et esimesed 4 väärtust on usaldusvahemikust väljas. See vihjab meile, et mudelis võiks olla kuni 4 *AR*-tüüpi kordajat. Arvestades, et leitud mõned nullist erinevad osaaautokorrelatsioonid võivad olla ka juhuslikud, siis oleks esialgu mõistlik proovida madalamat järku kordajatega mudelit, nagu näiteks $ARIMA(1, 0, 0)$. Sesoonse käitumise tõttu lisame mudelisse ka esialgu ühe sesoonse osa kordaja. Seega proovime elektri tarbimismahtude andmestikule sobitada esialgu $ARIMA(1, 0, 0) \times (1, 0, 0)_{12}$ mudeli ning mudeli sobivuse hindamiseks vaatame mudelist saadud juhuslike häirituste graafikut, nende autokorrelatsioone ning Ljung-Box testi tulemusi.



Mudeli jääkide autokorrelatsioonid



Ljung-Box test



Mudeli jäägid kõiguvad nulli ümber ning tunduvad olevat sõltumatud, mida kinnitab ka autokorrelatsioonide püsimine lubatud veapiirides. Kuna Ljung-Box teststatistikutele vastavad p -väärtused ületavad kõik olulisuse nivood $\alpha = 0.05$, siis definitsiooni kohaselt jääme nullhüpoteesi juurde ehk selle mudeli jäägid on sõltumatud sama jaotusega. Seega võime antud mudelit kasutada tarbimismahtude kirjeldamiseks ja prognoosimiseks.

Järgnevalt on toodud leitud mudeli väljund.

```
##
## Call:
## arima(x = kesk_tarbimine_kuine, order = c(1, 0, 0), seasonal = list(order = c(1,
##     0, 0), period = 12))
##
## Coefficients:
##          ar1      sar1  intercept
##       0.5814  0.7885   928.2196
## s.e.  0.1593  0.0948   45.9720
##
## sigma^2 estimated as 2135:  log likelihood = -200.36,  aic = 408.73
```

Oleme saanud elektri tarbimise kirjeldamiseks mudeli kujul

$$Q_t = 82.2 + 0.5814Q_{t-1} + 0.7885Q_{t-12} - 0.4584Q_{t-13} + A_T.$$

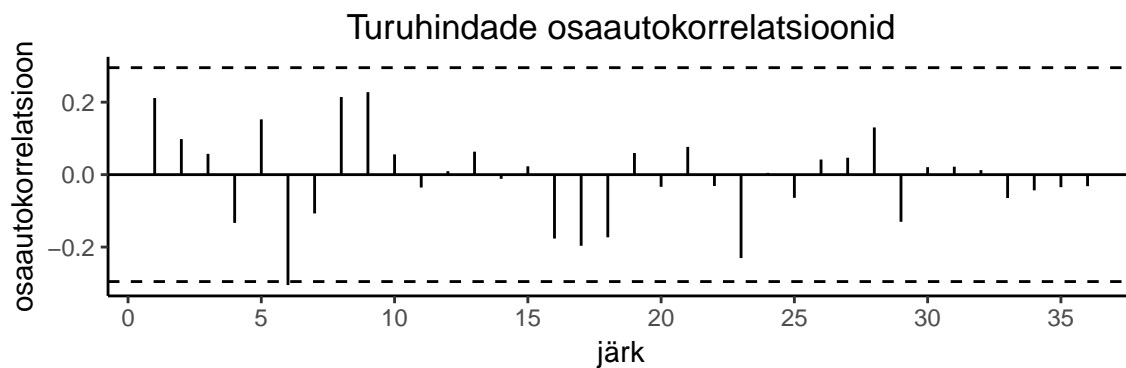
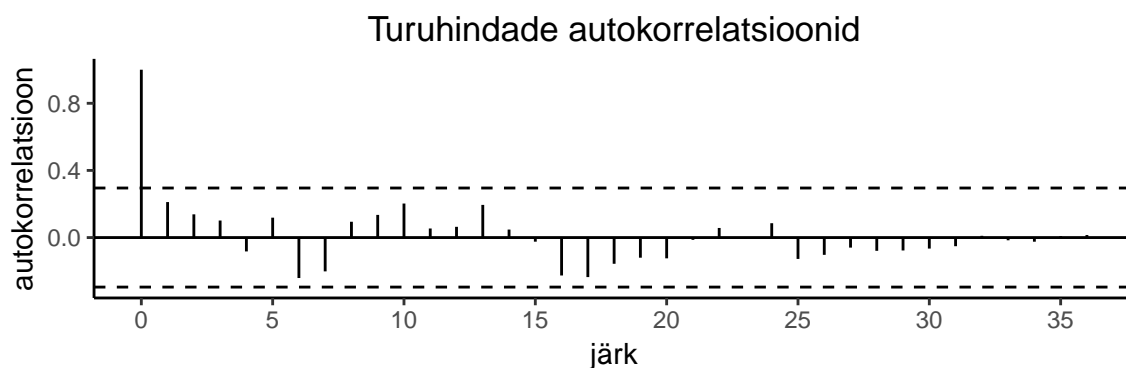
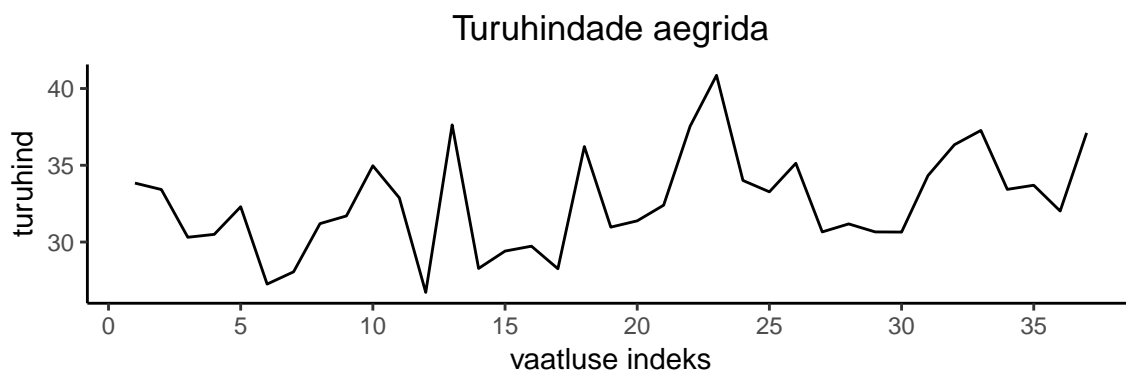
Seda mudelit kasutades saame 2018. aasta veebruari kuu tarbimismahu prognoosiks

$$E(\widehat{Q_T} | \mathcal{F}_{T-1}) \approx 1089 \text{ MWh},$$

s.t oodatavalt tarbitakse 2018. aasta veebruari kuus igas tunnis keskmiselt 1089 MW elektrit kogu Eesti peale kokku.

Analoogselt sobitame nüüd elektri turuhindade andmestikule *ARIMA*-tüüpi mudeli, mida kasutades saame leida turuhindade protsessile vastavad juhuslikud häiritused B_i , $i \in \mathbb{N}$.

Järgmistel graafikutel on elektri turuhinnad ning neile vastavad autokorrelatsioonid ja osaautokorrelatsioonid.

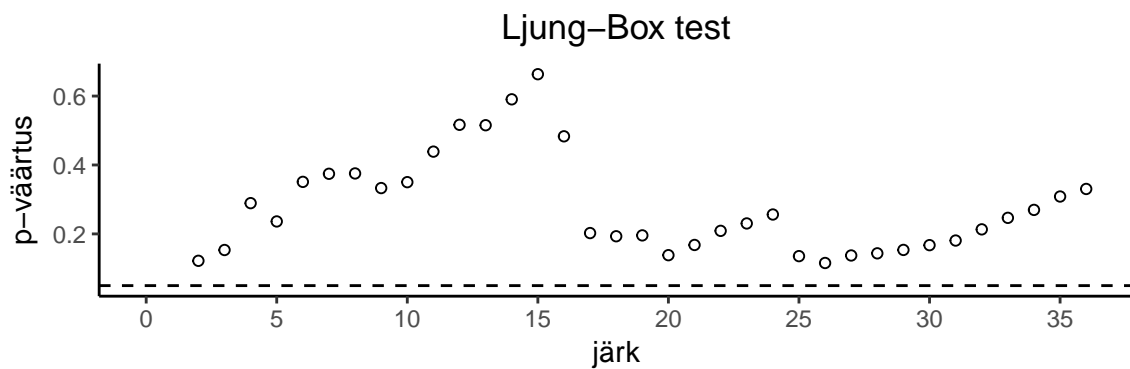
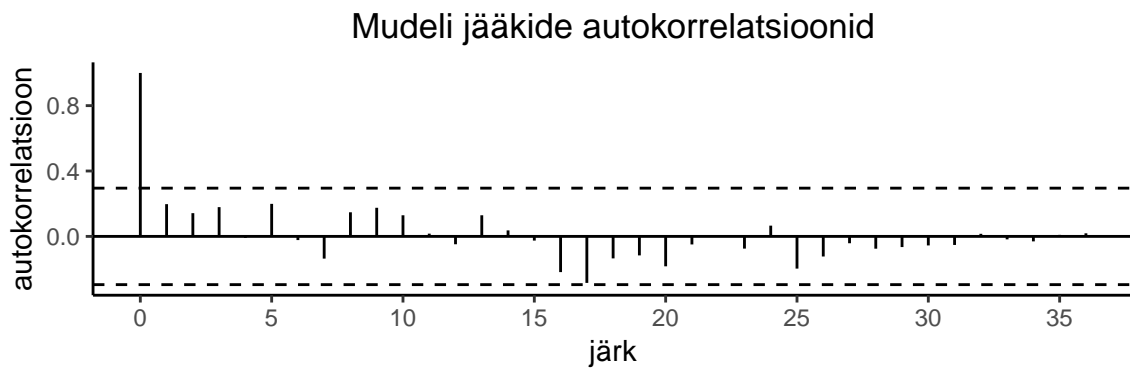
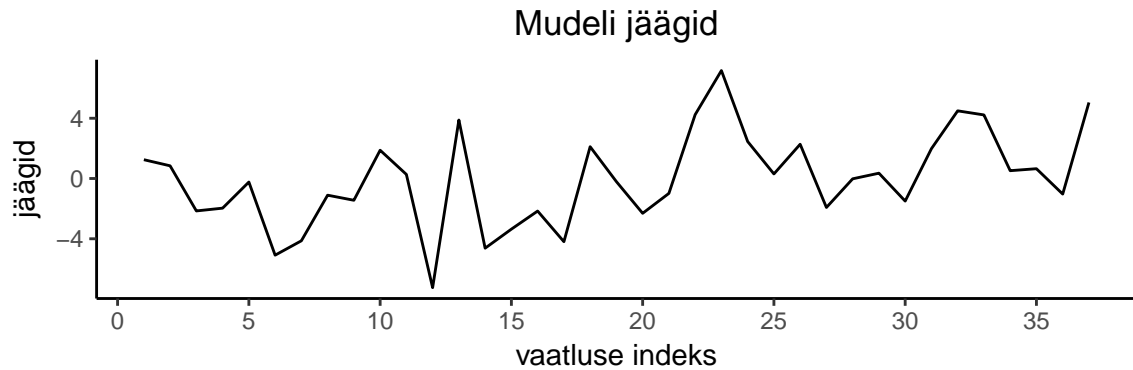


Esmalt paneme tähele, et elektri turuhindade reas sesoonsust ei paista ning ei ole näha ka varieeruvuse süstemaatilist muutumist ajas edasi liikudes. Tähelepanelikul vaatlusel võib näha väikest üldise hinnataseme

tõusu, mille lisamist modelisse vaatame hiljem.

Osaautokorrelatsioonide graafikul on näha, et järguga 6 väärtus on lubatud veapiiril. Seega proovime osaliste kordajatega $AR(6)$ mudelit.

Tekkinud jäägid koos vastavate autokorrelatsioonide ning Ljung-Box testi tulemused on järgnevatel graafikutel.



Autokorrelatsioonid on kõik lubatud veapiirides, seega sõltumatusega vastuolu need ei tuvastanud. Kuna kõik Ljung-Boxi testi p -väärtused on olulisusnivoost $\alpha = 0.05$ suuremad, siis loeme saadud mudeli sobivaks.

Järgnevalt on toodud leitud mudeli väljund.

```
##  
## Call:  
## arima(x = elspot_m_ts, order = c(6, 0, 0), fixed = c(0, 0, 0, 0, 0, NA, NA))
```

```
##
## Coefficients:
##          ar1  ar2  ar3  ar4  ar5          ar6  intercept
##           0    0    0    0    0   -0.2689    32.5438
## s.e.       0    0    0    0    0    0.1649    0.4133
##
## sigma^2 estimated as 9.455:  log likelihood = -94.29,  aic = 194.57
```

Antud mudelis on küll järguga 6 liige statistiliselt ebaoluline, kuid ilma selle liikmeta mudel on Akaike kriteeriumi kohaselt halvem - konstantse mudeli korral $AIC = 195.07$, kuid järguga 6 liikme korral on $AIC = 194.57$. Seega oleme saanud elektri turuhindade kirjeldamiseks mudeli kujul

$$S_t = 41.29 - 0.2689S_{t-6} + B_t.$$

Nüüd tuleb meil minimaalse fikseeritava hinna r_{min} leidmiseks arvutada veel selle mudeli ja elektri tarbimismahtude andmestikule sobitatud mudeli juhuslike häirituste vaheline kovaratsioon valemiga (6). Saame, et

$$\widehat{cov}(A_T, B_T) \approx 85.69 \text{ (MWh} \cdot \text{€)}$$

ning minimaalseks fikseeritavaks hinnaks on

$$r_{min} \approx 36.38 \text{ €}.$$

Futuurihinnaga $F = 36.3 \text{ €}$ võrreldes on sellisel juhul mahuriskist tulenev hinnalisa 0.08 € .

Leiame siin ka optimaalse futuuride koguse peatükis 1.4 tuletatud valemiga (4). Selleks on meil tarvis hinnata tingliku kovaratsiooni

$$\begin{aligned} cov(Q_T S_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) &= cov((E[Q_T | \mathcal{F}_{T-1}] + A_T)(E[S_T | \mathcal{F}_{T-1}] + B_T), E[S_T | \mathcal{F}_{T-1}] + B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= cov(E[Q_T | \mathcal{F}_{T-1}]E[S_T | \mathcal{F}_{T-1}] + E[Q_T | \mathcal{F}_{T-1}]B_T + E[S_T | \mathcal{F}_{T-1}]A_T + A_T B_T, \\ &\quad E[S_T | \mathcal{F}_{T-1}] + B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= cov(E[Q_T | \mathcal{F}_{T-1}]B_T + E[S_T | \mathcal{F}_{T-1}]A_T + A_T B_T, B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= E[Q_T | \mathcal{F}_{T-1}]D[B_T | \mathcal{F}_{T-1}] + E[S_T | \mathcal{F}_{T-1}]cov(A_T, B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &\quad + cov(A_T B_T, B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= E[Q_T | \mathcal{F}_{T-1}]D B_T + E[S_T | \mathcal{F}_{T-1}]cov(A_T, B_T) + cov(A_T B_T, B_T) \end{aligned}$$

Kuna juhuslike häirituste paarid (A_t, B_t) , $t \in \mathbb{N}$, on erinevatel ajahetkedel sõltumatud samast jaotusest, siis on ka paarid $(A_t B_t, B_t)$, $t \in \mathbb{N}$, erinevatel ajahetkedel sõltumatud samast jaotusest, mis tähendab, et kovaratsiooni $cov(A_T B_T, B_T)$ hindamiseks saame kasutada valemit (6). Seega

$$\text{cov}(\widehat{A_T B_T}, B_T) = \text{cov}(\widehat{AB}, B) \approx 125.3, \text{ (MWh}\cdot\text{€)}$$

millest

$$\text{cov}(Q_T \widehat{S_T}, \widehat{S_T} | \mathcal{F}_{T-1}) \approx 13810 \text{ (MWh}\cdot\text{€)}$$

Nüüd, optimaalne futuuride kogus, mida elektrimüüja võiks turult osta, kui vaadeldava kliendiga fikseeritakse hind $r \approx 36.38$ on

$$\begin{aligned} q_f &= \frac{\text{cov}(Q_T \widehat{S_T}, \widehat{S_T} | \mathcal{F}_{T-1}) - r \cdot \text{cov}(Q_T, \widehat{S_T} | \mathcal{F}_{T-1})}{D(\widehat{S_T} | \mathcal{F}_{T-1})} \\ &= \frac{\text{cov}(Q_T \widehat{S_T}, \widehat{S_T} | \mathcal{F}_{T-1}) - r \cdot \text{cov}(\widehat{A}, \widehat{B})}{D(\widehat{S_T} | \mathcal{F}_{T-1})} \\ &\approx 1131 \text{ (MWh)}. \end{aligned}$$

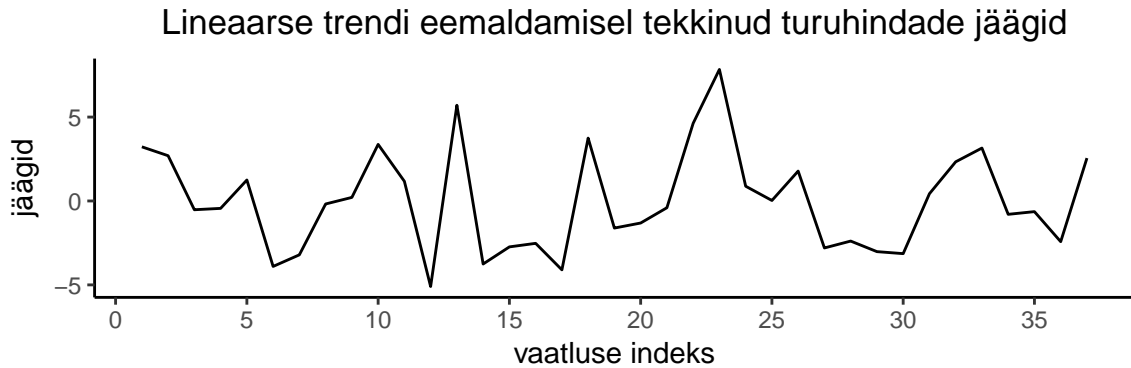
Saime optimaalseks futuuride koguseks ligikaudu 1131 MWh, mis oodatava tarbimismahuga 1089 MWh võrreldes umbes 42 MWh võrra suurem.

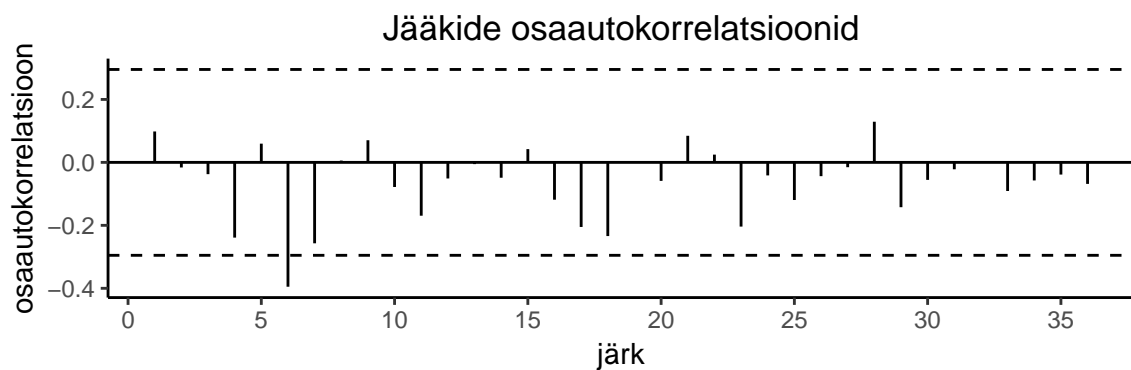
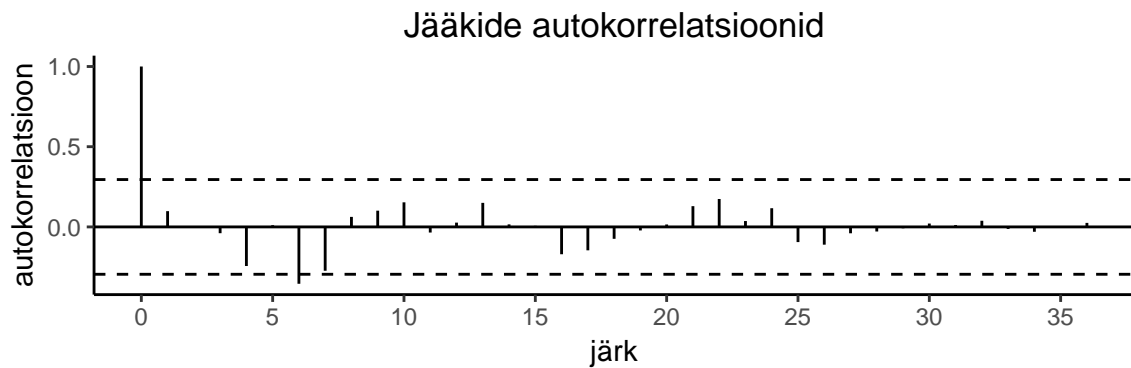
Elektri turuhindade graafikul nägime, et turuhindades võib esineda väike hindade kasv ajas. Eelmises peatükis eeldasime, et selline kasv on juhuslik ning seda mudeli sobitamisel arvesse ei võtnud. Reaalsuses aga võib täheldada väikest turuhindade tõusu näiteks üldise elatustaseme kasvades. Võttes hindade tõusutrendi mudeli sobitamisel arvesse, peaksime saama turuhindu paremini kirjeldava mudeli. Järgnevas näites sobitame turuhindade andmestikule lineaarse trendiga mudeli.

Näide 3

Lineaarse trendiga mudeli sobitamise protsess on põhimõttelt sama nagu *ARIMAX*-tüüpi mudeli sobitamise protsess, mida vaatame täpsemalt peatükis 2.4. Esmalt eemaldame turuhindade andmestikust lineaarse trendi ning seejärel sobitame tekkinud jääkidele *ARIMA*-tüüpi mudeli, kui selleks on vajadust.

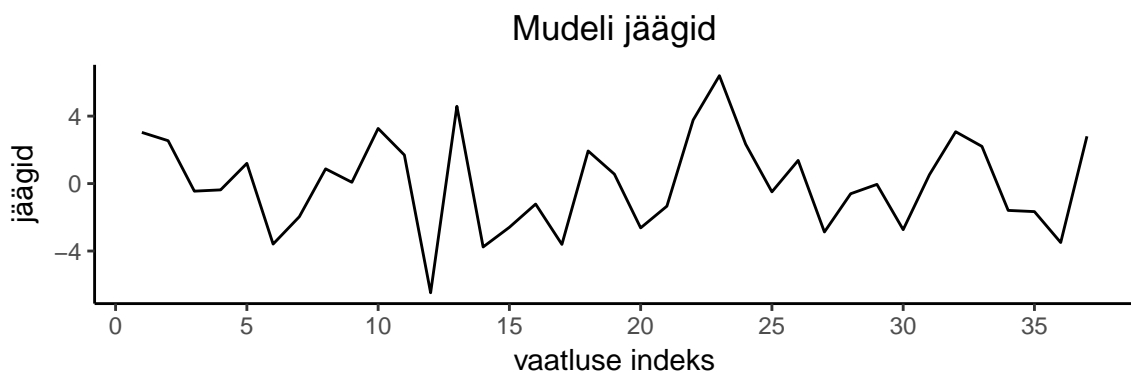
Järgnevatel graafikutel on lineaarse trendi eemaldamisel tekkinud jäägid ning neile vastavad autokorrelatsioonid ja osaaautokorrelatsioonid.



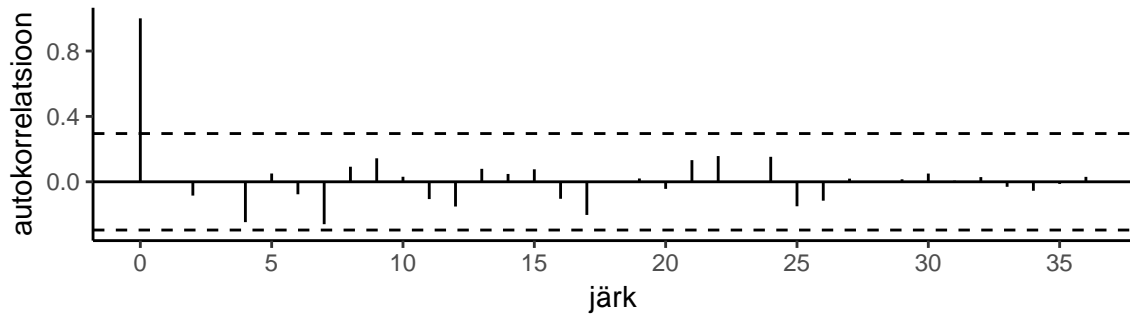


Graafikutel näeme, et nii autokorrelatsioonidest kui ka osautokorrelatsioonidest on järguga 6 väärtus lubatud veapiiridest väljas, mistõttu võiks tekkinud jääkidele sobitada mudeli, kus on järguga 6 kordaja sees. Kuna järguga 6 autokorrelatsioon on üsna vähe usaldusvahemikust väljas võrreldes vastava osautokorrelatsiooniga, siis proovime sobitada osaliste kordajatega $AR(6)$ mudeli.

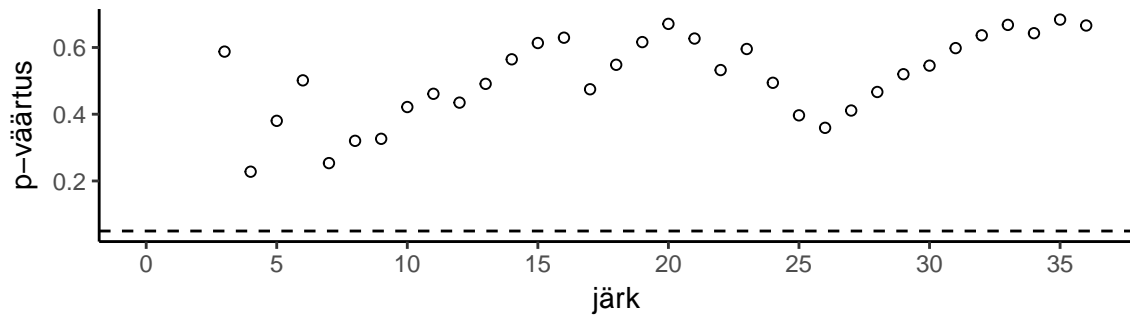
Järgnevatel graafikutel on osaliste kordajatega $AR(6)$ mudeli sobitamisel tekkinud jäägid, nende autokorrelatsioonid ning Ljung-Box testi tulemused.



Mudeli jääkide autokorrelatsioonid



Ljung-Box test



Mudeli jäägid tunduvad olevat nullkeskmisega ning autokorrelatsioonide graafikult näeme, et sõltuvusi neis ei tuvastatud. Ka Ljung-Box testi väärtused on kõik suuremad olulisuse nivoost $\alpha = 0.05$, seega võime lugeda selle mudeli sobivaks.

Järgnevalt on toodud leitud mudeli väljund.

```
##
## Call:
## arima(x = elspot_m_ts, order = c(6, 0, 0), xreg = lineaarne, fixed = c(0, 0,
##      0, 0, 0, NA, NA, NA))
##
## Coefficients:
##      ar1  ar2  ar3  ar4  ar5      ar6  intercept  lineaarne
##      0    0    0    0    0  -0.3688    30.467      0.1087
## s.e.    0    0    0    0    0   0.1512     0.755     0.0353
##
## sigma^2 estimated as 7.52:  log likelihood = -90.26,  aic = 188.53
```

Oleme saanud elektri turuhindade kirjeldamiseks lineaarse trendiga mudeli kujul

$$S_t = 41.46 + 0.04009t - 0.3688S_{t-6} + B_t.$$

Leitud mudelite juhuslike häirituste vaheline kovaratsioon on

$$\widehat{cov}(A_T, B_T) \approx 72.19 \text{ (MWh} \cdot \text{€)},$$

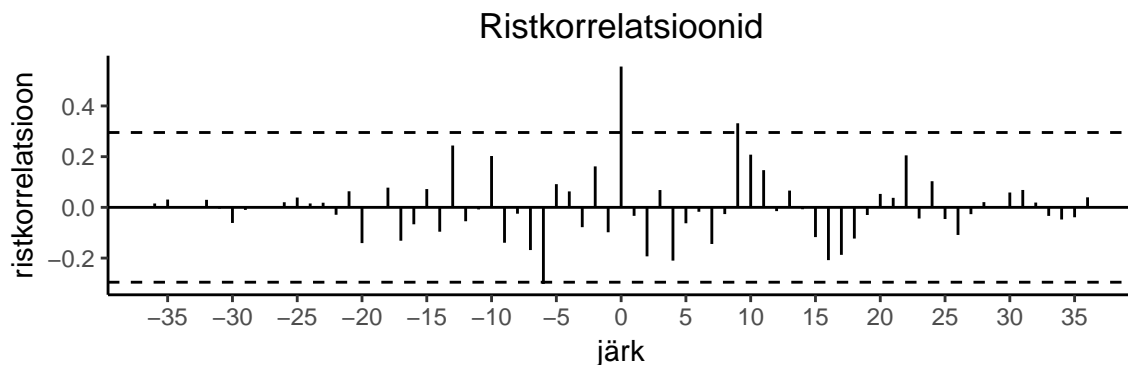
millest saame nüüd minimaalse fikseeritava hinna

$$r_{min} \approx 36.37 \text{ €}.$$

Futuurihinnaga $F = 36.3 \text{ €}$ võrreldes on sellisel juhul mahuriskist põhjustatud hinnalisa vaid 0.07 € , mis on viimati leitud juurdehindlusest 0.01 € võrra väiksem.

Siin peatükis tehtud eeldused olid leebemad kui peatükis 2.1. Siin eeldasime, et teatud perioodi tarbimismaht kujuneb sellele eelnevate vaatluste põhjal hinnatud oodatava väärtuse ja juhusliku häirituse summana. See tähendab et näiteks perioodile T eelneva perioodi tarbimismaht sisaldab informatsiooni vaadeldava perioodi tarbimise kohta. Seega me ei nõua, et vaatlused ise oleksid sõltumatud.

Eelnevalt oleme näinud juba tarbimismahtudele ja turuhindadele vastavate juhuslike häirituste autokorrelatsioone, mis kummagi andmestiku juhuslikes häiritustes sõltuvusi ei tuvastanud. Järgneval graafikul on näha ka näites 2 leitud elektri tarbimismahtudele vastavate juhuslike häirituste ning näites 2.1 leitud turuhindadele vastavate juhuslike häirituste vahelisi ristkorrelatsioone.



Arvestades, et umbes 5% ristkorrelatsioonidest võib juhuslikkuse tõttu veapiiridest väljas olla, siis siin peatükis tehtud eeldus, et vaadeldavate protsesside juhuslikud häiritused oleksid sõltumatud sama jaotusega, andmetega vastuollu ei lähe. Seega selles peatükis käsitletud meetodit saab reaalsuses ka kasutada.

2.3 Lepinguperiood tulevikus

Siiani oleme vaadanud mahuriski hinnastamist juhul, kui lepinguperiood on lepingu sõlmimise hetkele vahetult järgnev. Selles peatükis uurime juhtu, kus klient soovib sõlmida fikseeritud hinnaga lepingut perioodiks, mis algab kaugemas tulevikus.

Olgu meile huvipakkuv periood T praegusest ajahetkest $k \in \mathbb{N}$ perioodi võrra kaugemal tulevikus, s.t praegune ajahetk on $T - k$.

Järgnevas lähtume peatükk 2.2 eeldustest. Olgu juhuslike häirituste paarid (A_t, B_t) , $t \in \mathbb{Z}$, sõltumatud ja sama jaotusega. Eesmärgiks on fikseerida elektri hind perioodiks T , arvestades et lepingu sõlmimise hetk on $T - k$.

Selleks on vaja prognoosida tarbimismaht perioodiks T , mida on võimalik leida juba eelnevalt sobitatud mudelitest. Lisaks tuleb hinnata tarbimismahtude ja turuhindade vahelist kovaratsiooni selles perioodis.

Kaugemas tulevikus asuva perioodi tarbimismahu ja turuhinna vahelise kovaratsiooni leidmiseks kasutame kummalegi andmestikule eelnevalt sobitatud mudelite esituse üldise lineaarse protsessina.

Definitsioon 7. Üldiseks lineaarseks protsessiks nimetatakse juhuslikku protsessi $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$, mis on esitatav kujul

$$\tilde{Z}_t = \psi(\mathcal{B})\epsilon_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i},$$

kus iga $t \in \mathbb{N}$ korral on ϵ_t tsentreeritud sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused ning $\psi(x) = 1 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \dots$, kus $\forall i \in \mathbb{N}$ korral $\psi_i \in \mathbb{R}$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty.$$

Oletame, et elektri tarbimismahtude protsess $\{Q_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ on esitatav üldise lineaarse protsessina kujul

$$\tilde{Q}_t = \psi^Q(\mathcal{B})A_t = A_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^Q A_{t-i}$$

ning turuhindade protsess $\{S_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ on esitatav üldise lineaarse protsessina kujul

$$\tilde{S}_t = \psi^S(\mathcal{B})B_t = B_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^S B_{t-i}.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
Q_T &= A_T + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^Q A_{T-i} \\
&= A_T + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^Q A_{T-i} + \sum_{i=k}^{\infty} \psi_i^Q A_{T-i} \\
&= A_T + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^Q A_{T-i} + \sum_{i=k}^{T-1} \psi_i^Q A_{T-i},
\end{aligned}$$

kus suurus $\sum_{i=k}^{T-1} \psi_i^Q A_{T-i}$ on ajahetkel $T - k$ teada. Analoogiliselt saame ka elektri turuhindade protsessi üldise lineaarse protsessi esituse esitada kujul

$$S_T = B_T + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^S B_{T-i} + \sum_{i=k}^{T-1} \psi_i^S B_{T-i},$$

kus suurus $\sum_{i=k}^{T-1} \psi_i^S B_{T-i}$ on ajahetkel $T - k$ teada.

Nende esituste põhjal saame elektri tarbimismahtude ja turuhindade vahelise kovaratsiooni leidmiseks tuletada valemi

$$\begin{aligned}
cov(Q_T, S_T \mid \mathcal{F}_{T-k-1}) &= cov\left(A_T + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^Q A_{T-i} + \sum_{i=k}^{T-1} \psi_i^Q A_{T-i}, \right. \\
&\quad \left. B_T + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^S B_{T-i} + \sum_{i=k}^{T-1} \psi_i^S B_{T-i} \mid \mathcal{F}_{T-k-1}\right) \\
&= cov\left(A_T + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^Q A_{T-i}, B_T + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^S B_{T-i}\right) \\
&= cov(A_T, B_T) + cov\left(\sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^Q A_{T-i}, \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^S B_{T-i}\right) \\
&= cov(A_T, B_T) + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^Q \psi_i^S cov(A_{T-i}, B_{T-i}) \\
&= cov(A_T, B_T) \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_i^Q \psi_i^S\right), \tag{7}
\end{aligned}$$

arvestades, et juhuslikud häiritused on erinevatel ajahetkedel sõltumatud sama jaotusega.

Näide 4

Leiame siin näites minimaalse fikseeritava hinna r_{min} 2018. aasta septembrikuuks veebruarikuu lõpu seisuga. Septembrikuu futuurihinnaks võtame veebruarikuu lõpu seisuga 2018. aasta kolmanda kvartali futuurihinna $F = 26.6$ €.

Näites 2 sobitasime elektri tarbimismahtude andmestikule osaliste kordajatega $ARIMA(1,0,0) \times (1,0,0)_{12}$ -tüüpi mudeli ning turuhindade andmestikule osaliste kordajatega $AR(6)$ -tüüpi mudeli. Mudelite kujud on siin vastavalt

$$Q_t = 78.75 + 0.6333Q_{t-1} + 0.7712Q_{t-12} - 0.4884Q_{t-13} + A_t$$

ning

$$S_t = 37.29 - 0.1357S_{t-6} + B_t.$$

Kumbki leitud mudelitest ei ole üldise lineaarse protsessi kujul vaid autoregressiivsel kujul.

Järgmine lemma annab meile piisava tingimuse autoregressiivse protsessi teisendamiseks üldise lineaarse protsessi kujule.

Lemma 1. *Autoregressiivse protsessi $\phi(\mathcal{B})\tilde{Z}_t = \epsilon_t$ saab esitada üldise lineaarse protsessi kujul, kui polünoomi $\phi(x)$ kõik nullkohad kompleksarvude hulgas on mooduli poolest 1-st suuremad. Siis*

$$\psi(x) = \frac{1}{\phi(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i x^i$$

ning $\tilde{Z}_t = \psi(\mathcal{B})\epsilon_t$.

Kuna

$$\tilde{S}_t = -0.1357\tilde{S}_{t-6} + B_t$$

ehk

$$\left(1 + 0.1357\mathcal{B}^6\right)\tilde{S}_t = B_t,$$

kus polünoomi $\phi(x) = 1 + 0.1357x^6$ nullkohad

$$\begin{aligned} 1.208068 + 0.697479i, \quad |1.208068 + 0.697479i| &= \sqrt{1.208068^2 + 0.697479^2} && \approx 1.395 > 1 \\ -1.208068 + 0.697479i, \quad |-1.208068 + 0.697479i| &= \sqrt{(-1.208068)^2 + 0.697479^2} && \approx 1.395 > 1 \\ -1.208068 - 0.697479i, \quad |-1.208068 - 0.697479i| &= \sqrt{(-1.208068)^2 + (-0.697479)^2} && \approx 1.395 > 1 \\ 1.208068 - 0.697479i, \quad |1.208068 - 0.697479i| &= \sqrt{1.208068^2 + (-0.697479)^2} && \approx 1.395 > 1 \\ 1.394957i, \quad |1.394957i| &\approx 1.395 > 1 \\ -1.394957i, \quad |-1.394957i| &\approx 1.395 > 1 \end{aligned}$$

on mooduli poolest 1-st suuremad, siis eelneva lemma kohaselt leidub sellel protsessil üldise lineaarse protsessi kuju.

Eelnevalt toodud lemmast saame võrrandi

$$(1 + 0.1357x^6)(\psi_0 + \psi_1x + \psi_2x^2 + \dots) = 1,$$

milles hakkame sammhaaval leidma vajalikke kordajaid. Kovaratsiooni leidmiseks valemiga (7) on meil vaja

leida polünoomi $\psi(x)$ $k - 1 = 7 - 1 = 6$ esimest kordajat.

Kuna kaks polünoomi on võrdsed parajasti siis kui nende vastavate liikmete kordajad on võrdsed, siis saame

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \\ \psi_1 &= 0 \\ \psi_2 &= 0 \\ \psi_3 &= 0 \\ \psi_4 &= 0 \\ \psi_5 &= 0 \\ \psi_6 + 0.1357 \cdot \psi_0 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_6 = -0.1357\end{aligned}$$

Kuna

$$\tilde{Q}_t = 0.6333\tilde{Q}_{t-1} + 0.7712\tilde{Q}_{t-12} - 0.4884\tilde{Q}_{t-13} + A_T$$

ehk

$$\left(1 - 0.6333\mathcal{B} - 0.7712\mathcal{B}^{12} + 0.4884\mathcal{B}^{13}\right)\tilde{Q}_t = A_t,$$

kus polünoomi $\phi(x) = 1 - 0.6333x - 0.7712x^{12} + 0.4884x^{13}$ nullkohad

$$\begin{aligned}0.5109427 + 0.8849787i, \quad |0.5109427 + 0.8849787i| &= \sqrt{0.5109427^2 + 0.8849787^2} \approx 1.022 > 1 \\ -0.5109427 + 0.8849787i, \quad |-0.5109427 + 0.8849787i| &= \sqrt{(-0.5109427)^2 + 0.8849787^2} \approx 1.022 > 1 \\ -0.5109427 - 0.8849787i, \quad |-0.5109427 - 0.8849787i| &= \sqrt{(-0.5109427)^2 + (-0.8849787)^2} \approx 1.022 > 1 \\ 0.5109427 - 0.8849787i, \quad |0.5109427 - 0.8849787i| &= \sqrt{0.5109427^2 + (-0.8849787)^2} \approx 1.022 > 1 \\ -0.8849787 + 0.5109427i, \quad |-0.8849787 + 0.5109427i| &= \sqrt{(-0.8849787)^2 + 0.5109427^2} \approx 1.022 > 1 \\ 0.8849787 + 0.5109427i, \quad |0.8849787 + 0.5109427i| &= \sqrt{0.8849787^2 + 0.5109427^2} \approx 1.022 > 1 \\ -0.8849787 - 0.5109427i, \quad |-0.8849787 - 0.5109427i| &= \sqrt{(-0.8849787)^2 + (-0.5109427)^2} \approx 1.022 > 1 \\ 0.8849787 - 0.5109427i, \quad |0.8849787 - 0.5109427i| &= \sqrt{0.8849787^2 + (-0.5109427)^2} \approx 1.022 > 1 \\ 1.0218853i, \quad |1.0218853i| &\approx 1.022 > 1 \\ -1.0218853i, \quad |-1.0218853i| &\approx 1.022 > 1 \\ 1.0218853, \quad |1.0218853| &\approx 1.022 > 1 \\ -1.0218853, \quad |-1.0218853| &\approx 1.022 > 1 \\ 1.5790594, \quad |1.5790594| &\approx 1.579 > 1\end{aligned}$$

on mooduli poolest kõik 1-st suuremad, seega ka tarbimismahtude protsessil leidub üldise lineaarse protsessi kuju.

Eelnevalt toodud lemmast saame võrrandi

$$(1 - 0.6333x - 0.7712x^{12} + 0.4884x^{13})(\psi_0 + \psi_1x + \psi_2x^2 + \dots) = 1,$$

millest leiame vajalikud kordajad.

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \\ \psi_1 - 0.6333 \cdot \psi_0 &= 0 \Rightarrow \psi_1 = 0.6333 \\ \psi_2 - 0.6333 \cdot \psi_1 &= 0 \Rightarrow \psi_2 = 0.6333^2 \\ \psi_3 - 0.6333 \cdot \psi_2 &= 0 \Rightarrow \psi_3 = 0.6333^3 \\ \psi_4 - 0.6333 \cdot \psi_3 &= 0 \Rightarrow \psi_4 = 0.6333^4 \\ \psi_5 - 0.6333 \cdot \psi_4 &= 0 \Rightarrow \psi_5 = 0.6333^5 \\ \psi_6 - 0.6333 \cdot \psi_5 &= 0 \Rightarrow \psi_6 = 0.6333^6 \\ \psi_7 - 0.6333 \cdot \psi_6 &= 0 \Rightarrow \psi_7 = 0.6333^7\end{aligned}$$

Nüüd $\widehat{cov(A_T, B_T)} = \widehat{cov(A, B)} \approx 121.3 \text{ (MWh}\cdot\text{€)}$, seega

$$\widehat{cov(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-k-1})} \approx 120.2 \text{ (MWh}\cdot\text{€)}.$$

Fikseeritud hinna arvutamiseks prognoosime 2018. aasta septembrikuu tarbimismahu, milleks on

$$E(Q_T | \widehat{\mathcal{F}_{T-k-1}}) \approx 890.2 \text{ MWh}.$$

Kokkuvõttes saame minimaalseks fikseeritavaks hinnaks

$$r_{min} \approx 26.74 \text{ €}$$

ning futuurihinnaga $F = 26.6 \text{ €}$ võrreldes on sellisel juhul mahuriskist tulenev hinnalisa 0.14 € .

2.4 Tarbimise ja turuhindade mõjutegurid

Kehtigu peatükis 2.2 toodud eeldused. Siin peatükis vaatame tarbimist ja turuhindu mõjutavaid tegureid ning täpsustame tarbimismahtude ja turuhindade mudeleid selliste andmestike abil, mis võivad sisaldada lisainformatsiooni uuritavate aegride käitumise kohta.

On selge, et elektri tarbimine sõltub sellest, kas tegemist on päeva või ööga, tööpäeva või nädalavahe- tusega, suve või talvega. Peatükis 2.2 näites 2 toodud kogu Eesti kuukeskmiste tarbimismahtude graafikul nägime, et elektri tarbimine on sesoonne. Sesoonsuse põhjustajatena võib välja tuua välistemperatuuri ja päeva pikkuse.

Ülaltoodud mõjutegurid sisaldavad elektrimüüja jaoks informatsiooni kliendi tarbimise kohta, mis võivad aidata parendada tarbimist kirjeldavat mudelit täpsemate prognooside saamiseks. Seega tuleks mudeli koostamisel ka need tegurid arvesse võtta.

Vaatame välistemperatuure juhusliku protsessina $\{C_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ ning päeva pikkuseid deterministliku protsessina $\{p_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$. Järgnevates näidetes sobitamegi tarbimise ja turuhindade andmestikele *ARIMAX*-tüüpi mudelid, kus lisaks aegrea enda minevikuväärtustele on mudelis ka uuritava perioodi temperatuuri ja päeva pikkuse liikmed.

Definitsioon 8. Olgu $\forall i \in 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}, \{X_{i,t} \mid t \in \mathbb{N}\}$ juhuslikud protsessid. Juhuslikku protsessi $\{Z_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ nimetatakse *ARIMAX*(p, d, q)-tüüpi protsessiks, kui see on esitatav kujul

$$Z_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i X_{i,t} + \eta_t, \text{ kus}$$

$$(1 - \mathcal{B})^d \eta_t = \sum_{i=1}^p \phi_i (1 - \mathcal{B})^d \eta_{t-i} + \epsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i}$$

kus $\epsilon_t, t \in \mathbb{N}$, tsentreeritud, lõpliku dispersiooniga ja sõltumatud juhuslikud suurused, seejuures on $\forall t \in \mathbb{N}$ korral ϵ_t sõltumatud ka nii juhuslikest suurustest $Z_{t-i}, i \in \mathbb{N}$, kui ka $X_{i,t}, i \in \{1, \dots, n\}$.

Peatükis 2.2 märkisime, et andmete vähesuse tõttu neid diferentsida ei ole mõistlik. Seega otsime siin peatükis elektri tarbimismahtudele *ARIMAX*-tüüpi mudelit kujul

$$Q_t = \beta_0^Q + \beta_{1,0}^Q C_t + \beta_{2,0}^Q p_t + \eta_t^Q,$$

$$\phi^Q(\mathcal{B})\eta_t^Q = \theta^Q(\mathcal{B})A_t$$

kus $A_t, t \in \mathbb{N}$, on tsentreeritud lõpliku dispersiooniga sõltumatud juhuslikud suurused, seejuures on $\forall t \in \mathbb{N}$ korral A_t sõltumatu nii juhuslikest suurustest $Q_{t-i}, i \in \mathbb{N}$, kui ka C_t .

Elektri turuhindadele otsime *ARIMAX*-tüüpi mudelit kujul

$$S_t = \beta_0^S + \beta_{1,0}^S C_t + \beta_{2,0}^S p_t + \eta_t^S,$$

$$\phi^S(\mathcal{B})\eta_t^S = \theta^S(\mathcal{B})B_t$$

kus $B_t, t \in \mathbb{N}$, on tsentreeritud lõpliku dispersiooniga sõltumatud juhuslikud suurused, seejuures on $\forall t \in \mathbb{N}$ korral B_t sõltumatud nii juhuslikest suurustest S_{t-i} , $i \in \mathbb{N}$, kui ka C_t .

Märkus 5. Fikseerime $t \in \mathbb{N}$. Edasiseks paneme tähele, et kui

$$\eta_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \eta_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i},$$

siis

$$E(\eta_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{i=1}^p \phi_i \eta_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i}$$

ja seega

$$\eta_t - E[\eta_t | \mathcal{F}_{t-1}] = A_t.$$

Siit järeldub, et mingi juhusliku suuruse X korral

$$\text{cov}(\eta_t, X | \mathcal{F}_{t-1}) = \text{cov}(\epsilon_t, X | \mathcal{F}_{t-1}).$$

Perioodi T minimaalse fikseeritava hinna r_{min} leidmiseks tuletame elektri tarbimismagtude ja turuhindade vahelise kovaratsiooni valemi

$$\begin{aligned} \text{cov}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) &= \text{cov}(\beta_0^Q + \beta_{1,0}^Q C_T + \beta_{2,0}^Q p_T + \eta_T^Q, \beta_0^S + \beta_{1,0}^S C_T + \beta_{2,0}^S p_T + \eta_T^S | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^Q \beta_{1,0}^S \cdot \text{cov}(C_T, C_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \beta_{1,0}^Q \text{cov}(C_T, \eta_T^S | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &\quad + \beta_{1,0}^S \text{cov}(\eta_T^Q, C_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(\eta_T^Q, \eta_T^S | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^Q \beta_{1,0}^S D(C_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \beta_{1,0}^Q \text{cov}(C_T, B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &\quad + \beta_{1,0}^S \text{cov}(A_T, C_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(A_T, B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^Q \beta_{1,0}^S D(C_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(A_T, B_T). \end{aligned}$$

Näeme, et elektri tarbimismagtude ja turuhindade vahelise kovaratsiooni leidmiseks võib meil tekkida vajadus hinnata ka temperatuuri prognoosi dispersiooni. Teame ka, et kui kasutada temperatuuride andmestikku regressorreana uuritavas mudelis, siis tuleb meil prognoosimisel leida esmalt vastava perioodi temperatuuri prognoos. Selleks on meil mitmeid võimalusi. Üks variantidest on sobitada mudel temperatuuride aegreale, mida siin ka kasutame. Kuna aga temperatuuride andmestikule mudeli sobitamine ei ole käesoleva magistritöö eesmärk, siis jätame siinkohal mudeli sobitamise protsessi vahele ning vaatame vaid saadud mudeli kuju.

Edasises töös kasutatakse temperatuuride mudel on

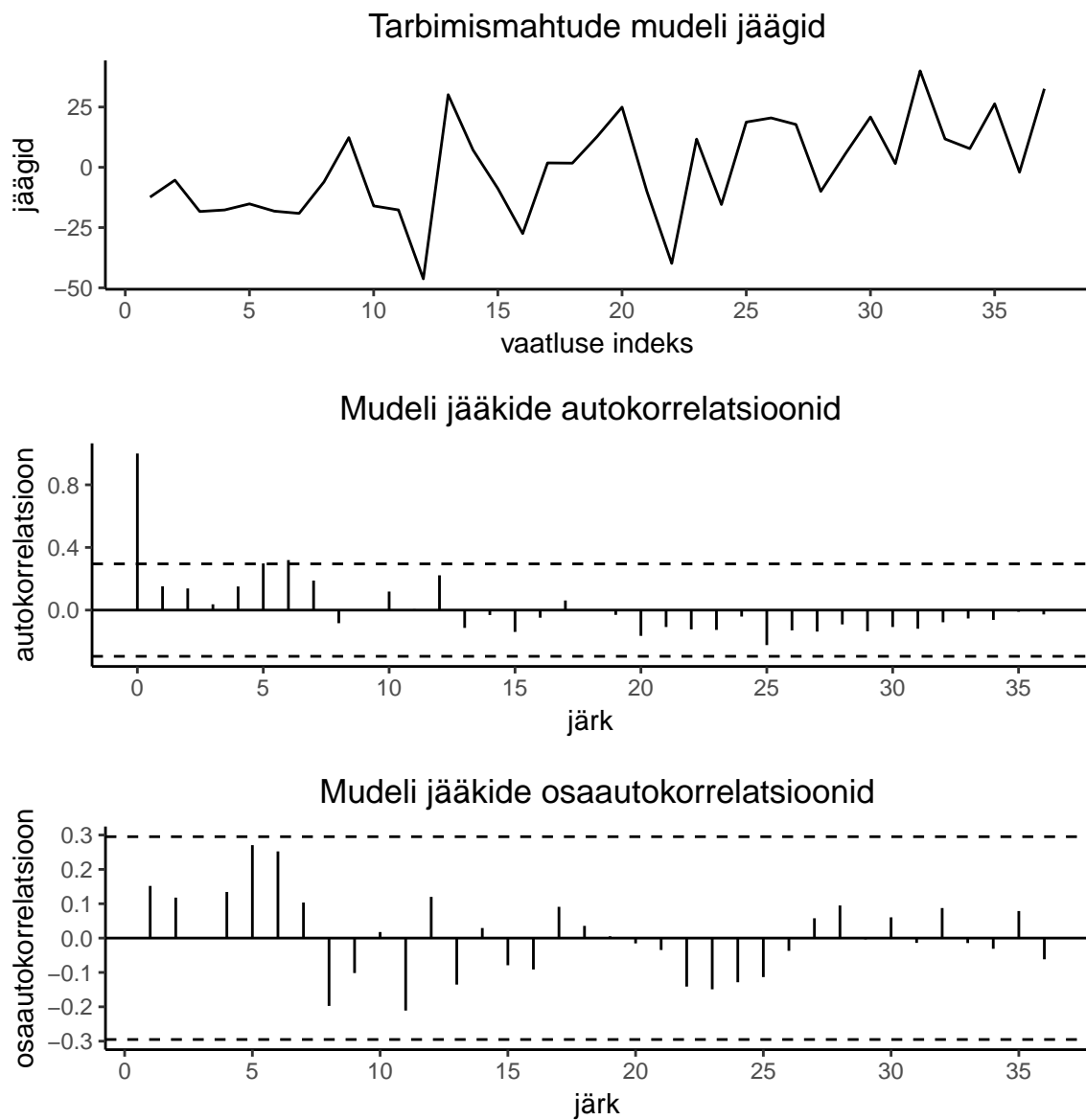
$$\begin{aligned} C_t &= 0.09692 + 0.5177C_{t-1} - 0.1457C_{t-12} + 0.07543C_{t-13} + 0.5402C_{t-24} - 0.2797C_{t-25} \\ &\quad + 0.5767C_{t-36} - 0.2986C_{t-37} + \epsilon_t \end{aligned}$$

Näide 5

Leiame fikseeritava hinna 2018. aasta veebruari kuuks kasutades Eesti kuukeskmisi päeva pikkuseid [A] ja välistemperatuure [RI] ning näites 1 toodud andmeid. Eesti kuukeskmised päevapikkused on leitud 4 Eesti linna päevapikkuste aritmeetilise keskmisena.

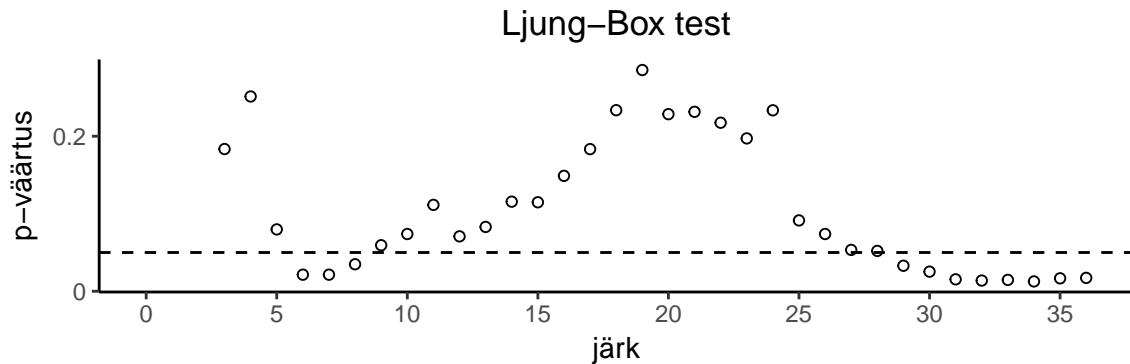
Sobitame nii elektri turuhindade kui ka tarbimismahtude andmetikele *ARIMAX*-tüüpi mudelid. Selleks eemaldame kõigepealt vaadeldavast andmestikust regressorriidade poolt kirjeldatava osa ning seejärel sobitame tekkinud jääkide reale *ARIMA*-tüüpi mudeli.

Tarbimismahtude andmestikust temperatuuride ja päeva pikkuste poolt kirjeldatava osa eemaldamisel tekkinud jäägid on järgneval graafikul koos vastavate autokorrelatsioonide ja osautokorrelatsioonidega. Nagu eelpool sai mainitud, siis tarbimismahtude sesoonsus tuleneb temperatuuride ja päeva pikkuste mõjust, seega ilmselt pole tekkivate jääkide mudelisse sesoonset komponenti enam vaja lisada.



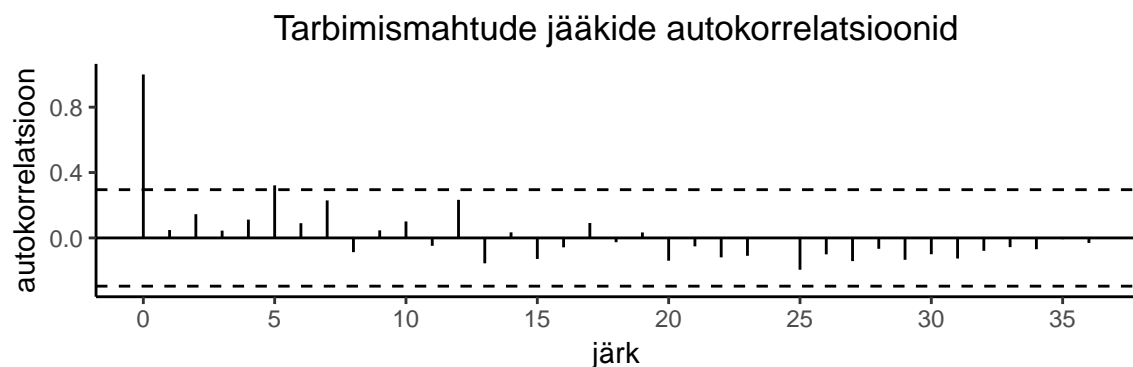
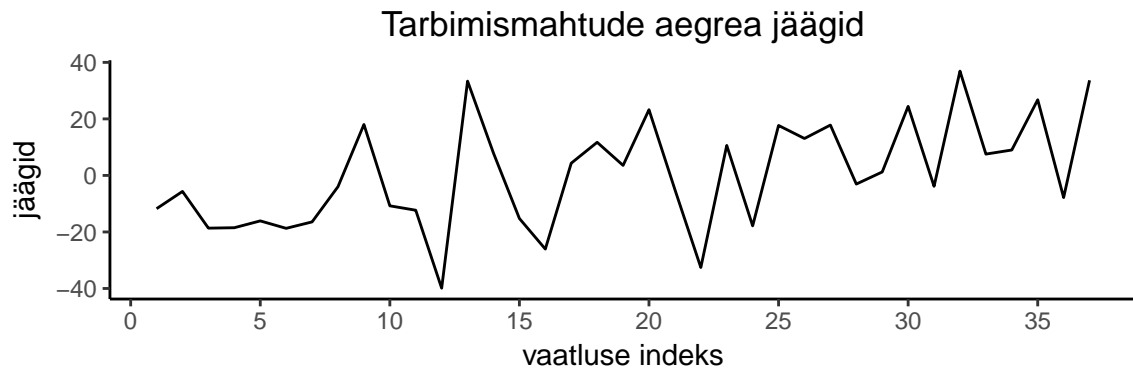
Graafikult näeme, et temperatuuride ja päeva pikkuste informatsiooni eemaldamise järel tekkinud

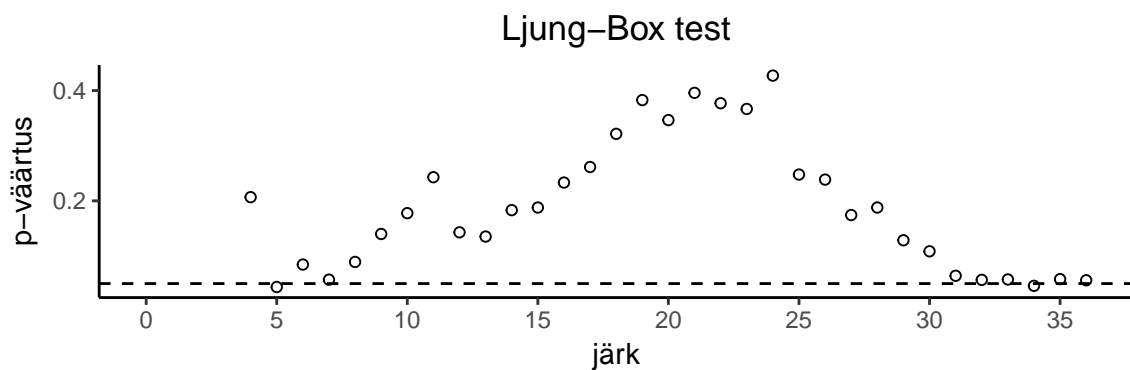
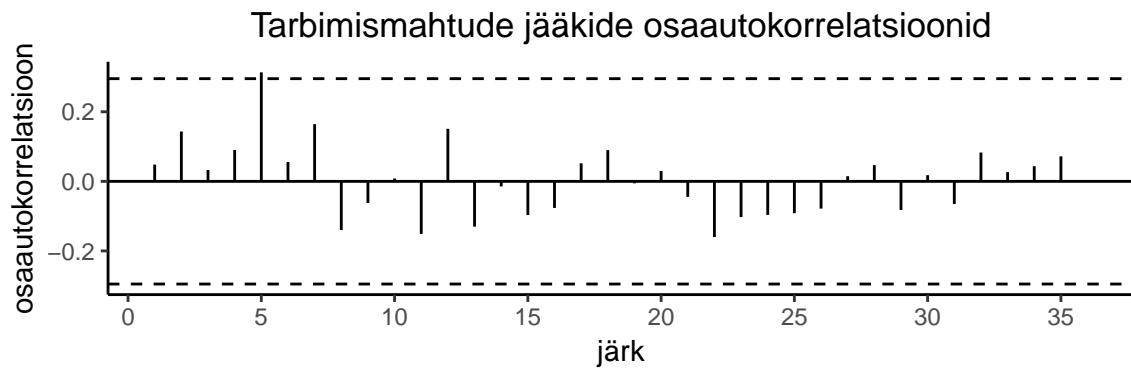
jääkidele vastavate autokorrelatsioonide graafikul on järguga 5 ja 6 väärtused piiri peal. See võib vihjata mudelile, mis sisaldab järguga 6 *MA*-tüüpi kordajat. Kuna tegu võib olla ka juhuslikkusega, siis uurime esialgu juba vaatluse all oleva mudeli sobivust Ljung-Box testiga.



Näeme, et Ljung-Box testi mõningad p -väärtused on väiksemad olulisuse nivoost $\alpha = 0.05$, s.t Ljung-Box test lükkab ümber vastavate gruppide sõltumatuse. Järelikult Ljung-Box testi kohaselt on jääkides veel mõningat informatsiooni sees, mille abil peaksime suutma parendada oma mudelit. Eelneva arutelu põhjal lisame järgmiseks mudelisse järguga 6 *MA*-tüüpi kordaja.

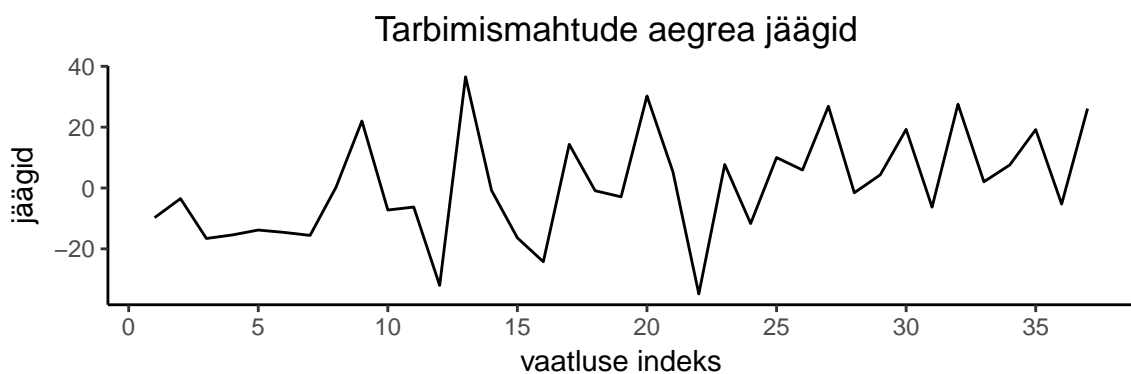
Tekkinud jäägid, koos vastavate autokorrelatsioonide, osautokorrelatsioonide ja Ljung-Box testi tulemustega on järgnevatel graafikutel.



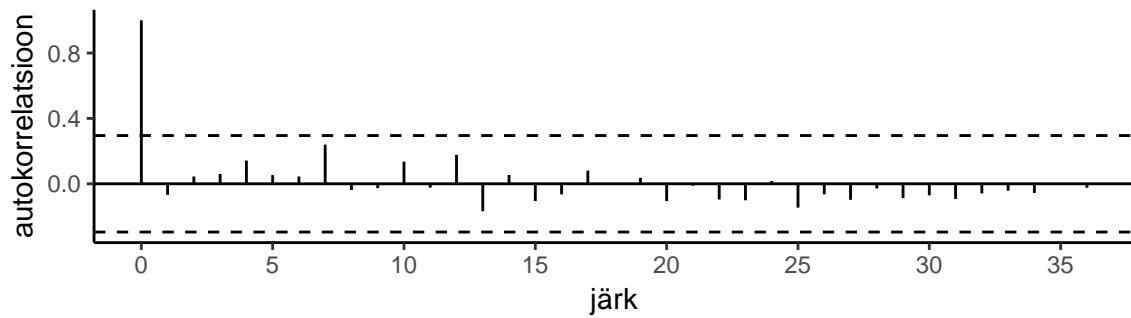


Näeme, et järguga 5 autokorrelatsioon ja osaautokorrelatsioon on lubatud vea piiril ning ka Ljung-Box testi mõningad p-väärtused on väiksemad olulisusenivoost $\alpha = 0.05$. Seega lisame mudelisse järguga 5 *MA*-tüüpi liikme.

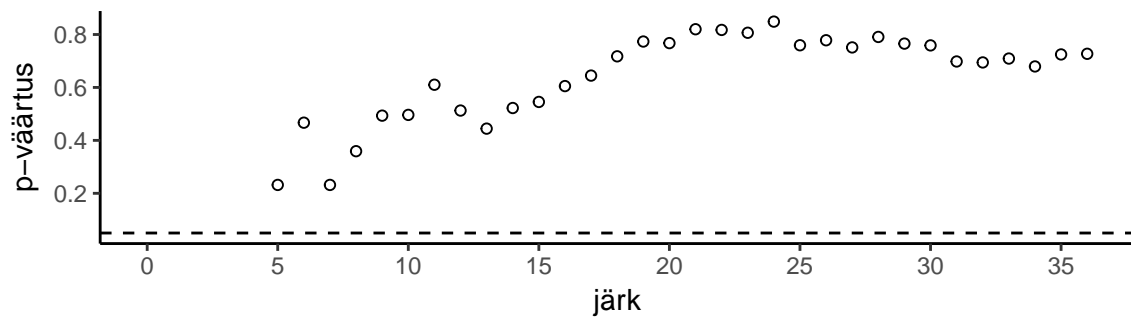
Tekkinud jäägid koos vastavate autokorrelatsioonide ja Ljung-Box testi tulemustega on järgnevatel graafikutel.



Tarbimismahtude jääkide autokorrelatsioonid



Ljung-Box test



Jäägid kõiguvad nulli ümber ning nii autokorrelatsioonid kui ka Ljung-Box test neis sõltuvusi ei tuvastanud, mistõttu loeme saadud mudeli sobivaks.

Järgnevalt on toodud leitud mudeli väljund.

```
##
## Call:
## arima(x = kesk_tarbimine_kuine, order = c(0, 0, 6), xreg = cbind(temp_kuine_ts,
##   paev_kuine_ts), fixed = c(0, 0, 0, 0, NA, NA, NA, NA, NA))
##
## Coefficients:
##      ma1  ma2  ma3  ma4      ma5      ma6 intercept  temp_kuine_ts
##        0   0   0   0  0.3681  0.3999 1137.5867      -12.5996
## s.e.    0   0   0   0  0.1424  0.1550   7.5478       0.3856
##      paev_kuine_ts
##          -0.1623
## s.e.         0.0112
##
## sigma^2 estimated as 292.3:  log likelihood = -158.63,  aic = 329.25
```

Seega oleme saanud välistemperatuuride ja päeva pikkuste abil tarbimist kirjeldava mudeli

$$Q_t = 1138 - 12.6C_t - 0.1623p_t + 0.3681A_{t-5} + 0.3999A_{t-6} + A_t.$$

Nagu eelpool mainitud, siis tuleb meil elektri tarbimise prognoosimiseks esmalt prognoosida kasutatud

regressoridade, temperatuuride ja päeva pikkuste, väärtusi samaks perioodiks ehk 2018. aasta veebruari kuuks. Kuna aga päeva pikkus on deterministlik protsess, siis uuritava perioodi jaoks on selle väärtus teada. Käesoleva aasta veebruari kuu Eesti keskmine päeva pikkus[A] on

$$\widehat{EP}_T \approx 560.7 \text{ min}$$

ning 2018. aasta veebruari kuu temperatuuri prognoos on

$$\widehat{EC}_T = 2.2^\circ C.$$

Nende põhjal on kogu Eesti 2018. aasta veebruari kuu tarbimismahu prognoosiks

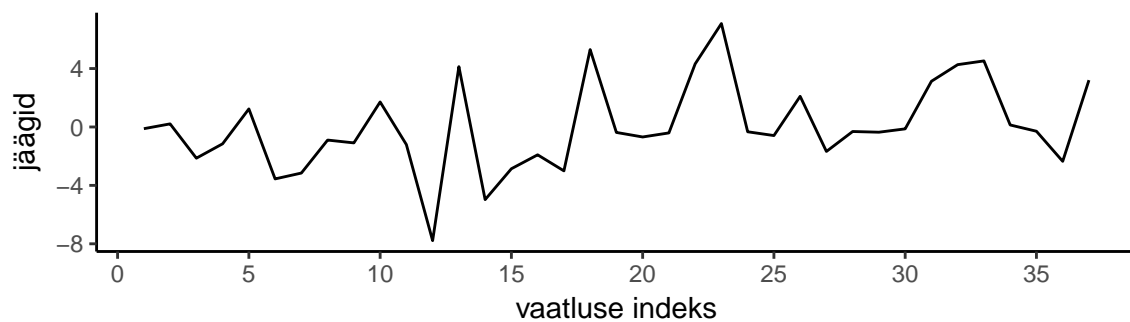
$$\widehat{EQ}_T \approx 1030 \text{ MWh},$$

mis on ligikaudu 59 MWh võrra väiksem kui peatükis 2.2 näites 2 leitud prognoos, kus mudel sisaldas vaid tarbimismahtude minevikuväärtusi.

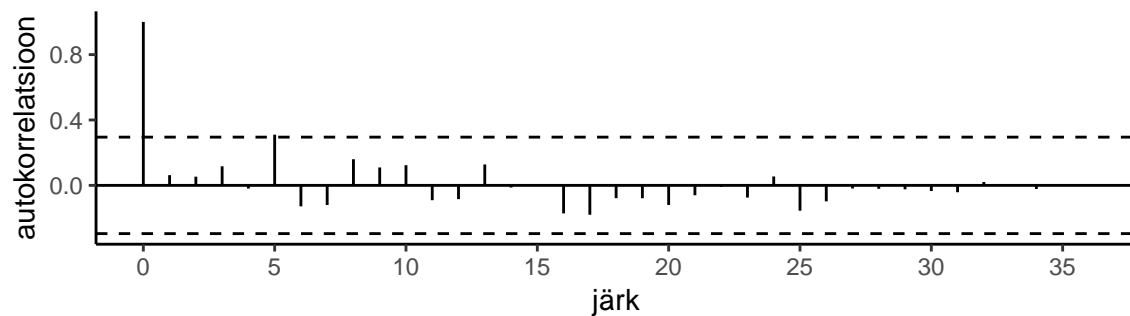
Järgmisena sobitame ka elektri turuhindade andmestikule *ARIMAX*-tüüpi mudeli, kus regressorriidadeks on temperatuuride ja päeva pikkuste andmestikud.

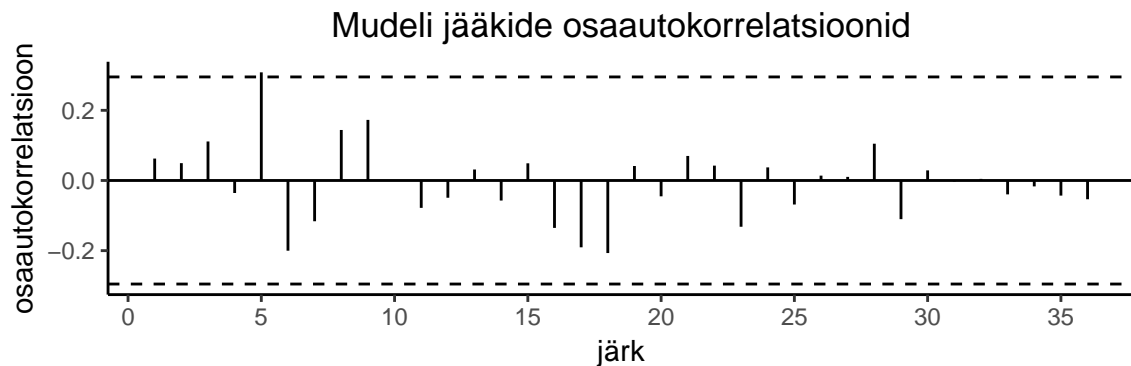
Järgneval graafikul näeme jääke, mis on saadud elektri turuhindade reast temperatuuride ja päeva pikkuste poolt kirjeldatava osa eemaldamisel. Mudeli sobitamiseks vaatame ka vastavate autokorrelatsioonide ja osautokorrelatsioonide graafikuid.

Turuhindade mudeli jäägid



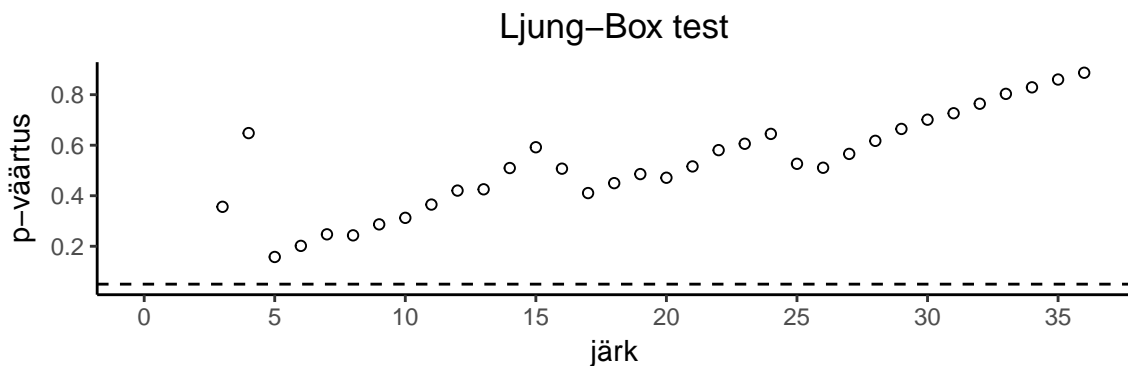
Mudeli jääkide autokorrelatsioonid





Graafikutel on näha, et järguga 5 autokorrelatsioon ja osautokorrelatsioon on piiri peal. Jällegi, kuna mõned autokorrelatsioonid ja osautokorrelatsioonid võivad veapiiridest väljas olla juhuslikult, siis enne uute kordajate lisamist uurime esmalt vaadeldava mudeli sobivust Ljung-Box testi abil.

Ljung-Box testi p -väärtused on järgmisel graafikul.

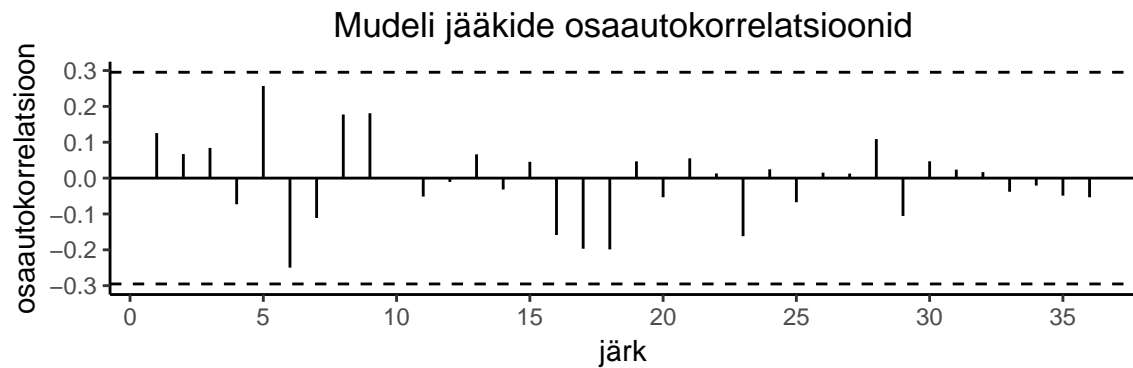
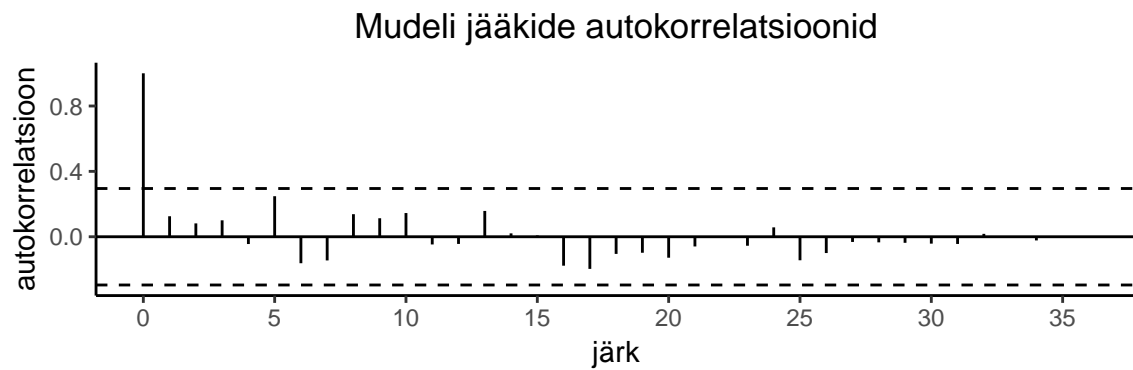
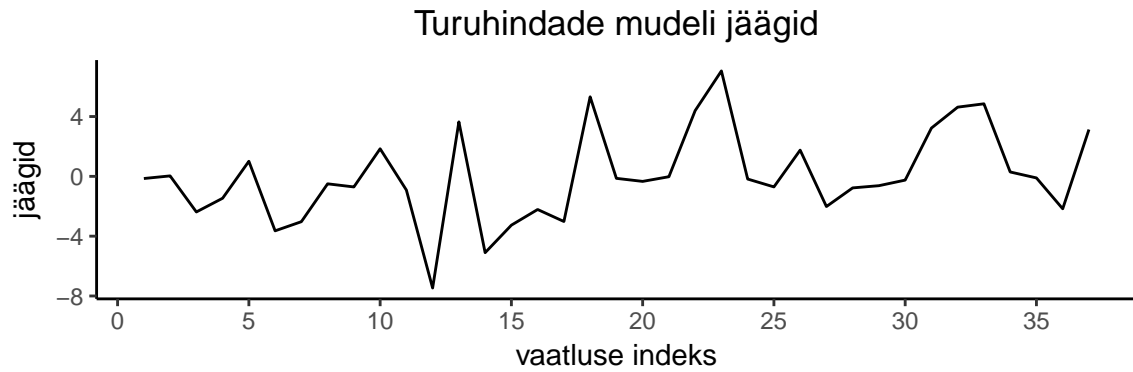


Kuna kõik Ljung-Box testi väärtused on olulisuse nivoost $\alpha = 0.05$ suuremad, siis jääme olemasoleva mudeli juurde.

Paneme aga tähele, et saadud mudelis on temperatuuri kordaja $\beta_{1,0} = 0.0669$ ja vastav standardhälve 0.1255 ning päeva pikkuse kordaja $\beta_{2,0} = -0.0062$ ja vastav standardhälve 0.0036, s.t mõlema kordaja 95% usaldusvahemik sisaldab arvu 0. See tähendab, et saadud mudel on statistiliselt ebaoluline.

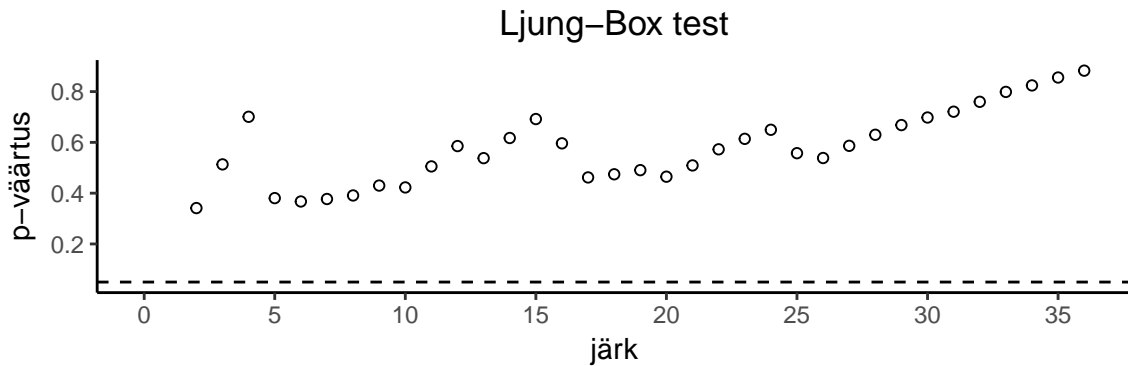
Sobiva mudeli saamiseks tuleks üks regressoritest mudelist välja jätta. Kuna temperatuuri liikme kordaja $\beta_{1,0}$ on vastava standardhálbega võrreldes väga väike, siis valime elektri turuhindadele sobitamiseks päeva pikkuse liikmega mudeli.

Järgmisel graafikul näeme jääke, mis on saadud turuhindade andmestikust päeva pikkuste informatsiooni eemaldamisel. Sobiva mudeli leidmiseks vaatame ka vastavate autokorrelatsioonide ja osautokorrelatsioonide graafikuid.



Jääkidele vastavad autokorrelatsioonid ja osaautokorrelatsioonid on kõik lubatud veapiirides, mistõttu tundub, et jääkides sõltuvusi ei esine.

Vaatame veel ka Ljung-Box testi tulemusi.



Ljung-Box testi kohaselt model sobib, seega eraldi *ARIMA* mudelit päeva pikkuste informatsiooni eemaldamisel tekkinud jääkidele sobitada ei ole vaja.

Järgnevalt on toodud leitud mudeli väljund.

```
##
## Call:
## arima(x = elspot_m_ts, xreg = paev_kuine_ts)
##
## Coefficients:
##      intercept    paev_kuine_ts
##      35.9797      -0.0046
## s.e.      1.5699      0.0020
##
## sigma^2 estimated as 8.978:  log likelihood = -93.1,  aic = 192.21
```

Oleme saanud päeva pikkuste abil turuhindade kirjeldamiseks mudeli

$$S_t = 35.98 - 0.00463p_t + B_t.$$

Nüüd on tarbimise ja turuhinna vaheline kovaratsioon leitav valemiga

$$\begin{aligned} \text{cov}(Q_T, S_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) &= \text{cov}(\beta_0^Q + \beta_{1,0}^Q C_T + \beta_{2,0}^Q p_T + \eta_T^Q, \beta_0^S + \beta_{2,0}^S p_T + \eta_T^S \mid \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^Q \text{cov}(C_T, \eta_T^S \mid \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(\eta_T^Q, \eta_T^S \mid \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^Q \text{cov}(C_T, B_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(A_T, B_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^Q \text{cov}(C_T, B_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(A_T, B_T) \end{aligned}$$

Temperatuuride ja turuhindade juhuslike häirituste vaheline kovaratsioon on

$$\widehat{\text{cov}(C_T, B_T \mid \mathcal{F}_{T-1})} = \widehat{\text{cov}(\epsilon_T, B_T \mid \mathcal{F}_{T-1})} \approx -2.362 \text{ (MWh} \cdot \text{€)},$$

kus $\{\epsilon_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ on temperatuuride protsessile vastavad juhuslikud häiritused. Turuhindade protsessi ja

tarbimismahtude protsessi juhuslike häirituste vaheline kovaratsioon on

$$\widehat{cov}(A_T, B_T) \approx 16.9 \text{ (MWh}\cdot\text{€)},$$

ning seega

$$\widehat{cov}(Q_T, S_T) \approx 46.66 \text{ (MWh}\cdot\text{€)},$$

millest saame minimaalseks fikseeritavaks hinnaks

$$r_{min} \approx 36.35 \text{ €}.$$

Futuurihinnaga $F = 36.3 \text{ €}$ võrreldes on sellisel juhul mahuriskist tulenev hinnalisa vaid 0.05 € .

Siin peatükis jätkasime me peatükk 2.2 eeldustega, seega, nagu ka peatüki 2.2 lõpus mainitud, on selline protsess sobilik mahu riski hinnastamiseks. Käesolevas peatükis kirjeldasime elektri tarbimismahtude ja turuhindade protsesse lisaks vastavate andmestike minevikuväärtustele ka teiste võimalikku lisainformatsiooni sisaldavate andmestike kaudu. Seega peaks siin vaadatud meetod olema parem mahuriski hinnastamiseks, kui peatükis 2.2 vaadatud meetod.

2.5 Ühesuunaline sõltuvus

Peatükis 1.1 rääkisime elektri tarbimise ja turuhindade vahelisest korreleeritusest. Siin peatükis eeldame, et turuhind perioodis T sõltub sama ajahetke tarbimismahust. Nagu ka peatükis 1.1 mainisime, siis võib vähesel määral ka turuhind mõjutada kliendi tarbimist, kui tegemist on muutuva hinnaga lepinguga, kuid siin peatükis me sellele sõltuvusele tähelepanu ei pööra.

Ühesuunalise sõltuvuse kirjeldamiseks sobib peatükis 2.4 defineeritud *ARIMAX*-tüüpi mudel. Siin otsime elektri turuhindade kirjeldamiseks mudelit kujul

$$S_t = \beta_0^S + \beta_{1,0}^S Q_t + \eta_t^S, \\ \phi^S(\mathcal{B})\eta_t^S = \theta^S(\mathcal{B})B_t$$

Arvestades, et tarbimise hetkeväärtus ei sõltu turuhindade minevikuväärtustest ning seega ka suurustest B_i , $i \in \{1, \dots, T-1\}$, siis saame elektri tarbimise ja turuhindade vahelise kovaratsiooni leidmiseks valemi

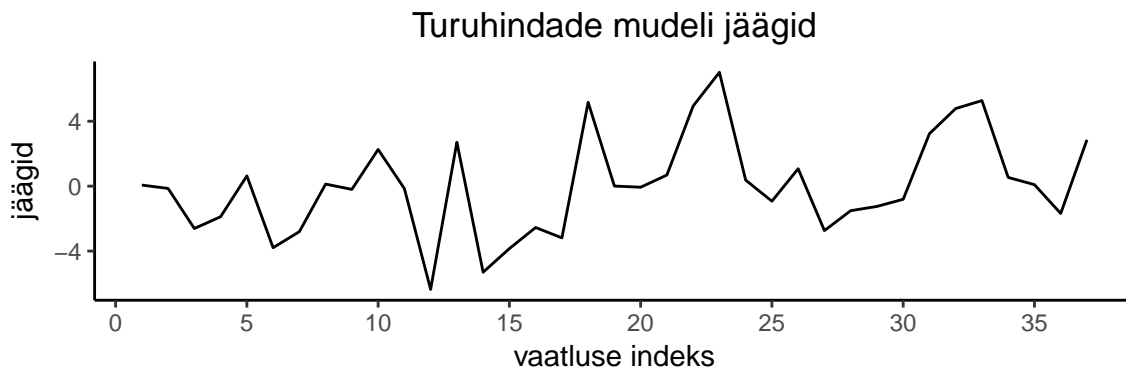
$$\begin{aligned} \text{cov}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) &= \text{cov}(Q_T, \beta_0^S + \beta_{1,0}^S Q_T + \eta_T^S | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^S \text{cov}(Q_T, Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(Q_T, \eta_T^S | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^S D(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(Q_T, B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\ &= \beta_{1,0}^S D(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}). \end{aligned}$$

Näide 6

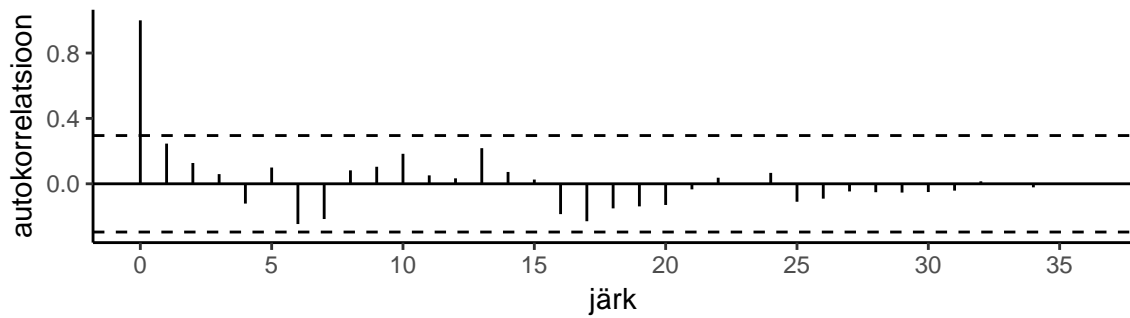
Leiame 2018. aasta veebruari kuuks fikseeritava hinna kasutades näites 1 toodud andmeid.

Siin on meie eesmärgiks sobitada elektri turuhindade andmestikule *ARIMAX*-tüüpi mudel, kus regressorreaks on kogu Eesti elektri tarbimise aegrida ning seejärel leida minimaalne fikseeritav hind r_{min} .

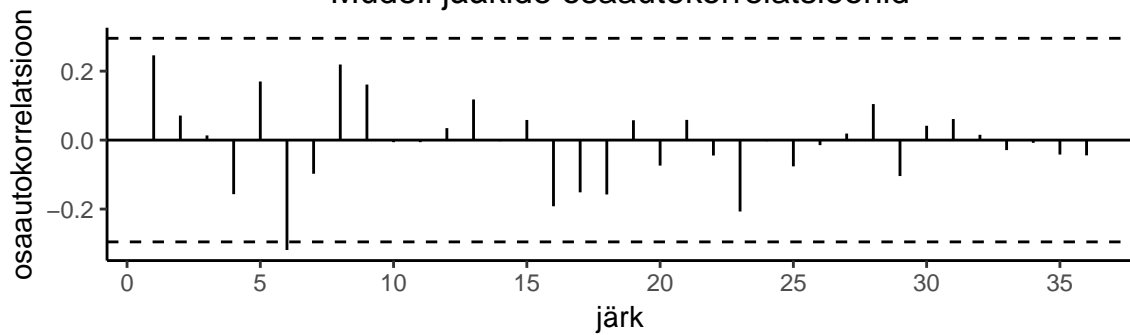
Järgneval graafikul on elektri turuhindade andmestikult tarbimismahude poolt kirjeldatava osa eemaldamisel tekkinud jäägid ning neile vastavad autokorrelatsioonid ja osautokorrelatsioonid.



Mudeli jääkide autokorrelatsioonid

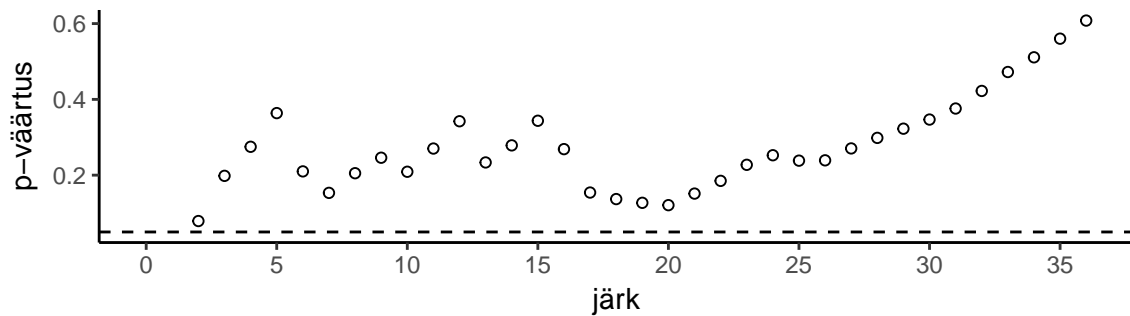


Mudeli jääkide osautokorrelatsioonid



Jäägid kõiguvad 0 ümber ning autokorrelatsioonid sõltuvusi ei tuvastanud. Osaautokorrelatsioonide graafikul näeme, et järguga 6 väärtus on veidi lubatud veapiiridest väljas. Kuna tegu võib olla juhuslikkusega, siis vaatame enne uute liikmete lisamist mudelisse ka Ljung-Box testi tulemusi.

Ljung-Box test



Näeme, et Ljung-Box testi p-väärtused on kõik olulisuse nivoost $\alpha = 0.05$ suuremad. Seetõttu võime lugeda vaadeldava mudeli sobivaks.

Järgnevalt on toodud leitud mudeli väljund.

```
##
## Call:
## arima(x = elspot_m_ts, xreg = kesk_tarbimine_kuine)
##
## Coefficients:
##      intercept  kesk_tarbimine_kuine
```

```
##          24.1903          0.009
## s.e.      3.7500          0.004
##
## sigma^2 estimated as 8.998:  log likelihood = -93.15,  aic = 192.29
```

Oleme saanud elektri tarbimismahtude abil turuhindade kirjeldamiseks mudeli

$$S_t = 24.19 + 0.008986Q_t + B_t.$$

Sellest mudelist saame kovaratsiooni arvutamiseks kordaja $\beta_{1,0} \approx 0.008986$ ning peatükis 2.4 näites 5 tarbimise aegreale sobitatud *ARIMAX* mudelist saame tarbimise prognoosi $\widehat{EQ}_T \approx 1030$ ning prognoosi standardhälbe ligikaudu 17.12. Seega

$$\text{cov}(\widehat{Q}_T, S_T) = \beta_{1,0} \cdot D(\widehat{Q}_T | \mathcal{F}_{T-1}) \approx 2.632 \text{ (MWh} \cdot \text{€)}$$

ning fikseeritavaks hinnaks r saame

$$r \approx 36.30 \text{ €}.$$

Futuurihinnaga $F = 36.3 \text{ €}$ võrreldes on sellisel juhul mahuriskist tulenev hinnalisa ligikaudu 0 € .

Märkus 6. *ARIMAX-tüüpi mudelit sobitades eeldame, et A_T ja B_T on sõltumatud, s.t nende vaheline korrelatsioon peaks olema teoreetiliselt 0. Testides selle korrelatsiooni olulisust, saame Pearsoni korrelatsiooni-testiga 95% usaldusvahemikuks $(-0.05484, 0.5493)$. Seega saadud korrelatsioon on statistiliselt ebaoluline ning jääkide sõltumatuse eeldus ei ole rikutud.*

Nüüdseks oleme kasutanud fikseeritud hinna leidmiseks sellist tarbimismahtude mudelit, mis sisaldab päeva pikkuste ja temperatuuride liikmeid ning sellist turuhindade mudelit, mis sisaldab tarbimismahtude liiget, s.t turuhindu mõjutavad temperatuur ja päeva pikkus läbi tarbimismahu. Paneme aga tähele, et temperatuuril ja päeva pikkustel võib olla elektri turuhindadele ka otsene mõju. Näiteks sõltub veehulk ilmastikust, mistõttu mõjutab temperatuur hüdroenergiat.

Järgmisena proovime täpsustada eelmises näites leitud elektri turuhindade mudelit lisades sellele lisaks tarbimismahule ka päeva pikkuse ja temperatuuri liikmed. Seega otsime siin turuhindade andmestikule *ARIMAX*-tüüpi mudelit kujul

$$S_t = \beta_0^S + \beta_{1,0}^S Q_t + \beta_{2,0}^S C_t + \beta_{3,0}^S p_t + \eta_t^S,$$

$$\phi^S(\mathcal{B})\eta_t^S = \theta^S(\mathcal{B})B_t.$$

Siis saame elektri tarbimismahtude ja turuhindade vahelise kovaratsiooni leidmiseks valemi

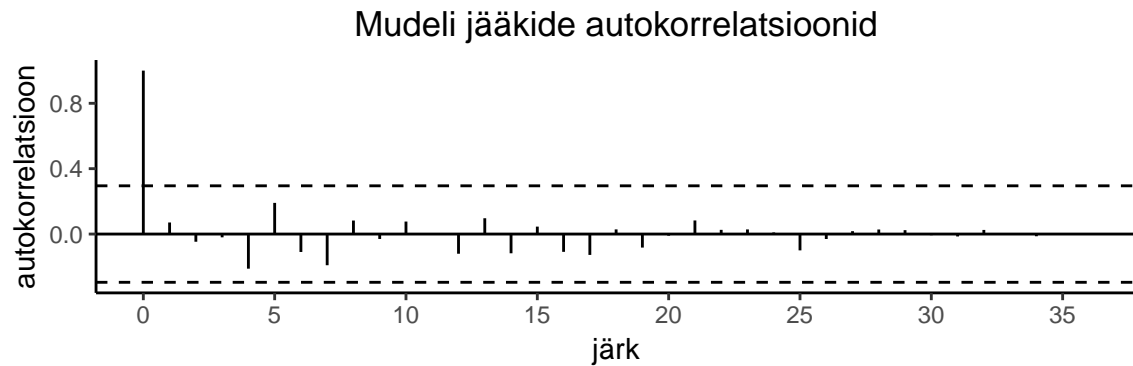
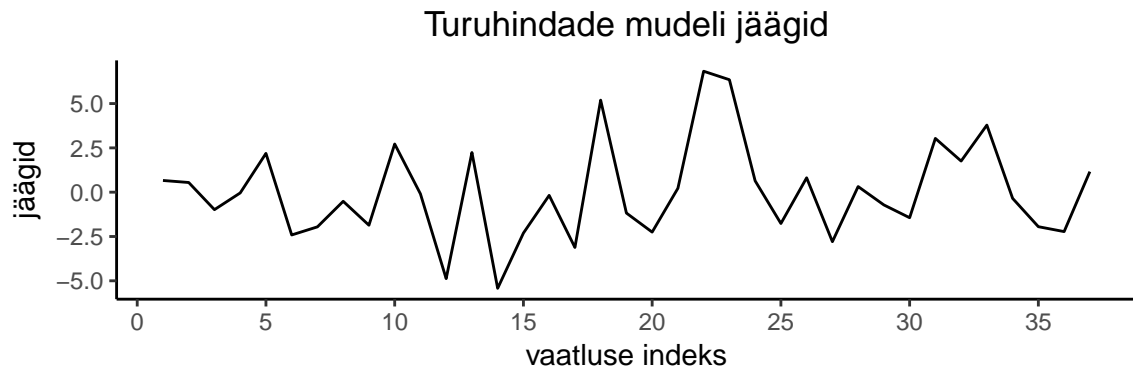
$$\begin{aligned}
\text{cov}(Q_T, S_T | \mathcal{F}_{T-1}) &= \text{cov}(Q_T, \beta_0^S + \beta_{1,0}^S Q_T + \beta_{2,0}^S C_T + \beta_{3,0}^S p_T + \eta_T^S | \mathcal{F}_{T-1}) \\
&= \beta_{1,0}^S \text{cov}(Q_T, Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \beta_{2,0}^S \text{cov}(Q_T, C_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(Q_T, \eta_T^S | \mathcal{F}_{T-1}) \\
&= \beta_{1,0}^S D(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \beta_{2,0}^S \text{cov}(Q_T, C_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \text{cov}(Q_T, B_T | \mathcal{F}_{T-1}) \\
&= \beta_{1,0}^S D(Q_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \beta_{2,0}^S \text{cov}(Q_T, C_T | \mathcal{F}_{T-1}).
\end{aligned}$$

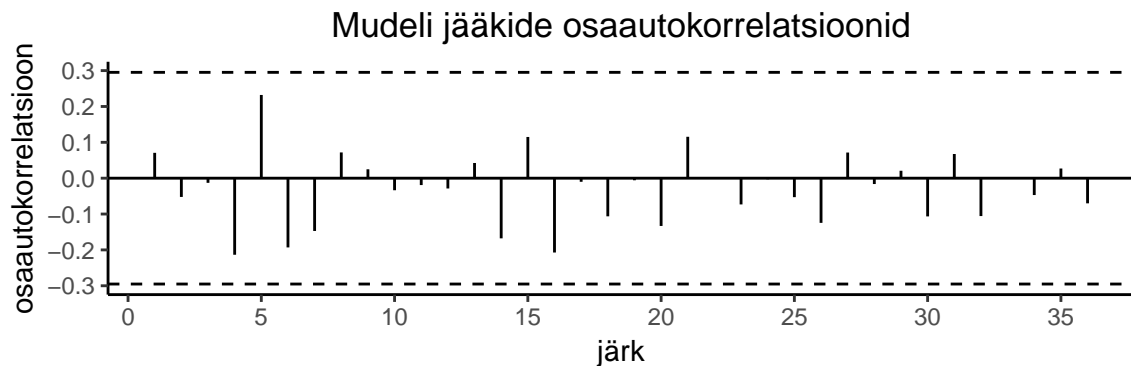
Näide 7

Leiame fikseeritava hinna 2018. aasta veebruari kuuks kasutades Eesti kuukeskmisi päeva pikkuseid ja välistemperatuure ning näites 1 toodud andmeid.

Sobitame elektri turuhindade andmestikule *ARIMAX*-tüüpi mudeli, mis sisaldab sama perioodi tarbimismahtu, päeva pikkust ning välistemperatuuri.

Elektri turuhindade andmestikust tarbimismahude, temperatuuride ja päeva pikkuste informatsiooni eemaldamisel tekkinud jäägid koos vastavate autokorrelatsioonide ja osautokorrelatsioonidega on näha järgnevatel graafikutel.





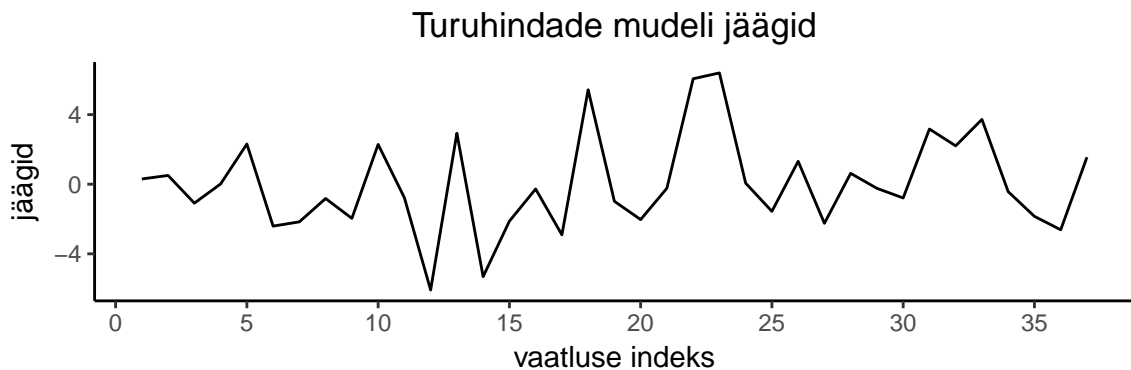
Jäägid kõiguvad 0 ümber ning jääkidele vastavad autokorrelatsioonid ja osaaautokorrelatsioonid on kõik lubatud veapiirides. Selles mudelis on aga päeva pikkust kirjeldava liikme kordaja $\beta_{3,0} = 0.0046$ ning vastav standardhälve 0.0051, mistõttu sisaldab päeva pikkuse kordaja 95% usaldusvahemik arvu 0. See tähendab, et päeva pikkus on selles elektri turuhindasid kirjeldavas mudelis statistiliselt ebaoluline.

Proovime nüüd elektri turuhindadele sobitada mudeli, kus regressorriidadeks on vaid sama ajahetke tarbimine ja välistemperatuur. See tähendab, et me otsime mudelit kujul

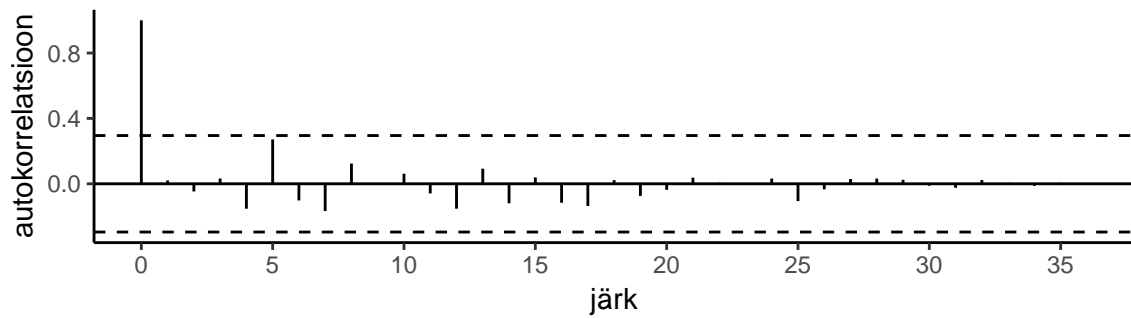
$$S_t = \beta_0^S + \beta_{1,0}^S Q_t + \beta_{2,0}^S C_t + \eta_t^S,$$

$$\phi^S(\mathcal{B})\eta_t^S = \theta^S(\mathcal{B})B_t.$$

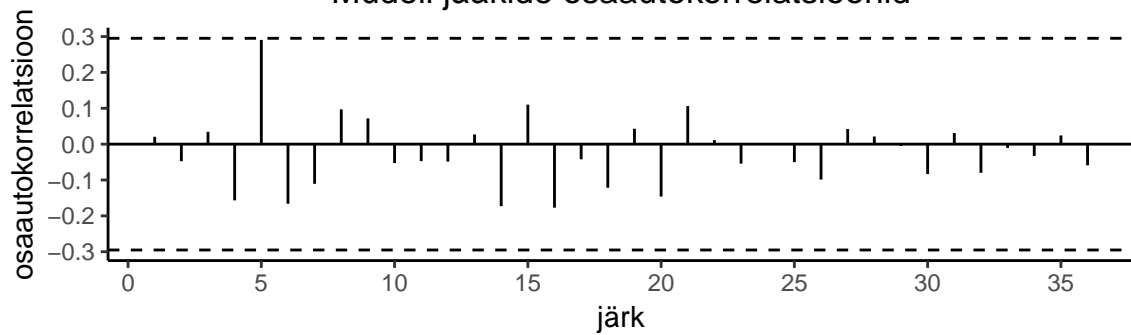
Elektri turuhindade andmestikust tarbimismahtude ja temperatuuride informatsiooni eemaldamisel tekkinud jäägid koos vastavate autokorrelatsioonide ja osaautokorrelatsioonidega on näha järgnevatel graafikutel.



Mudeli jääkide autokorrelatsioonid

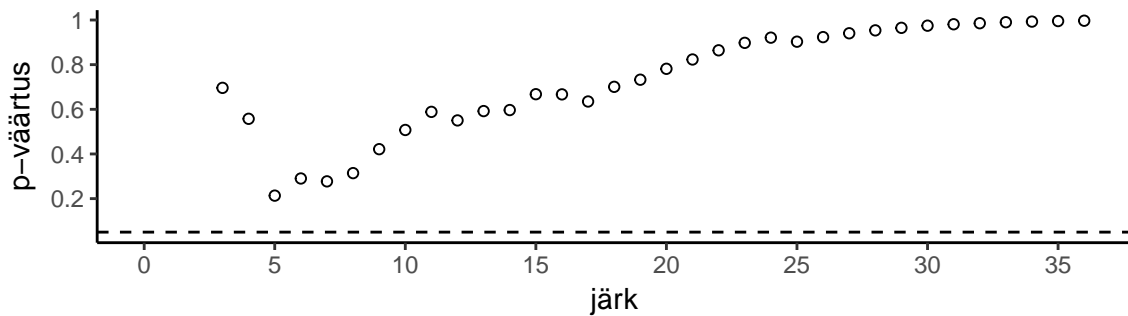


Mudeli jääkide osautokorrelatsioonid



Jäägid kõiguvad jällegi 0 ümber ning autokorrelatsioonid ja osautokorrelatsioonid on lubatud veapiirides. Vaatame ka Ljung-Box testi tulemusi.

Ljung-Box test



Ljung-Box testi väärtused on kõik suuremad kui olulisusnivoo $\alpha = 0.05$, seega juba vaadeldav mudel sobib. Järelikult tekkinud jääkidele eraldi *ARIMA* mudelit sobitada ei ole vaja.

Järgnevalt on toodud leitud mudeli väljund.

```
##
## Call:
## arima(x = elspot_m_ts, xreg = cbind(kesk_tarbimine_kuine, temp_kuine_ts))
##
## Coefficients:
##      intercept  kesk_tarbimine_kuine  temp_kuine_ts
##      -16.0754         0.0470         0.7056
```

```
## s.e.      15.3671          0.0146          0.2625
##
## sigma^2 estimated as 7.528:  log likelihood = -89.84,  aic = 187.69
```

Oleme saanud tarbimismahtude ja temperatuuride abil elektri turuhindade kirjeldamiseks mudeli kujul

$$S_t = -16.08 + 0.04704Q_t + 0.7056C_t + B_t$$

Sellest mudelist saame kovaratsiooni arvutamiseks kordaja $\beta_{1,0} = 0.04704$ ning peatükis 2.4 näites 5 tarbimise aegreale sobitatud *ARIMAX* mudelist saame tarbimise prognoosi $\widehat{EQ}_T \approx 1030$ ning prognoosi standardhälbe ligikaudu 17.12. Tarbimise ja temperatuuride vaheline kovaratsioon on leitav peatükis 2.4 tarbimise andmestikule sobitatud mudelist saadud jääkide ja temperatuuride andmestikule sobitatud mudelist saadud jääkide abil

$$\text{cov}(\widehat{Q_T}, \widehat{C_T}) = \text{cov}(\widehat{A_T}, \epsilon_T) \approx -0.7223 \text{ (MWh} \cdot \text{€)},$$

kus $\{\epsilon_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ on temperatuuride protsessile vastavad juhuslikud häiritused. Seega

$$\text{cov}(\widehat{Q_T}, \widehat{S_T}) \approx 13.27 \text{ (MWh} \cdot \text{€)}$$

ning minimaalseks fikseeritavaks hinnaks r_{min} saame

$$r \approx 36.31 \text{ €}.$$

Futuurihinnaga $F = 36.3 \text{ €}$ võrreldes on sellisel juhul mahuriskist tulenev hinnalisa ligikaudu 0.01 € .

Märkus 7. *ARIMAX-tüüpi mudelit sobitades eeldame, et A_T ja B_T on sõltumatud, s.t nende vaheline korrelatsioon peaks olema teoreetiliselt 0. Testides selle korrelatsiooni olulisust, saame Pearsoni korrelatsiooni-testiga 95% usaldusvahemikuks $(-0.2969, 0.3506)$. Seega saadud korrelatsioon on statistiliselt ebaoluline ning jääkide sõltumatuse eeldus ei ole rikutud.*

Peatükis 2.5 jätkasime peatüki 2.2 eeldustega elektri turuhindade ja tarbimise kohta. Selle peatüki eesmärk oli täpsustada elektri turuhindade mudelit võttes arvesse elektri tarbimismahte. Antud peatükis käsitletud meetod on peatüki 2.4 edasiarendus ning seetõttu peaks see olema siin vaadatutest parim meetod mahuriski hinnastamiseks.

Kirjandus

- [A] <http://www.astronoomia.ee/tahistaevas/efemeriidid/>, Kasutatud 29.03.2018
- [CC] R. CAVAZOS-CADENA, *The Asymptotic Distribution of Sample Autocorrelations for a Class of Linear Filters*, Journal of Multivariate Analysis, 48. Academic Press, Inc. Orlando, FL, USA, 1994.
- [EN] <https://transparency.entsoe.eu/>, Kasutatud 05.05.2018
- [LB] G.M.LJUNG, G.E.P.BOX, *On a measure of lack of fit in time series models*, Biometrika, 65. Oxford University Press, Great Britain, 1978.
- [NA] <http://www.nasdaqomx.com/commodities/market-prices>, Kasutatud 05.05.2018
- [NO] <https://www.nordpoolgroup.com/historical-market-data/>, Kasutatud 05.05.2018
- [RI] RIIGI ILMATEENISTUS, <http://www.ilmateenistus.ee/ilmatarkus/publikatsioonid/aastaraamatud/>, Kasutatud 29.03.2018

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Laura Kruusmann,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose “Mahuriski hinnastamine elektriturul”, mille juhendajad on Raul Kangro ja Taavi Pungas,
 - 1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.